

**TD : LA ROTATION DANS LE PLAN**

**Exercice1 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  positif. Soit  $r_A$  la rotation de

centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_O$  une rotation de centre O et d'angle  $\alpha$ .

- 1) Déterminer  $r_A(A)$ ;  $r_A(B)$ ;  $r_A(D)$ ,
- 2) Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = B$  ?  
Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = C$  ?

**Exercice2 :** ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  positif et Soit  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\pi/2$

Décomposer la rotation  $r$  en composée de deux symétries orthogonales

**Exercice3 :** ABC est un triangle. On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

- 1) Montrer que :  $BE = CD$  2) Montrer que :  $(BE) \perp (CD)$

**Exercice4 :** ABC est un triangle tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  positif. On construit à l'extérieur les carrés ABDE et ACFG

Soit  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  déterminer :  $r(E)$  et  $r(C)$

Et Montrer que :  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$

**Exercice5 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  positif.

I et J deux points tels que :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$  et

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

Montrer que  $(OI) \perp (OJ)$  et  $OI = OJ$

**Exercice6 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  positif. Soit  $(D)$  la droite parallèle à  $(BD)$  et coupe  $(AD)$  en M et coupe  $(AB)$  en N et Soit  $r$  la rotation de centre O et

d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . E et F les images M et N

respectivement Par la rotation  $r$

- 1) Faire une figure et Montrer que  $(EF) \perp (MN)$
- 2) Déterminer l'image de la droite  $(BD)$  par la rotation  $r$
- 3) Montrer que  $DN = FA$  et  $(EF) \parallel (AC)$

**Exercice7 :** ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  positif et O le milieu du segment  $[BC]$ . D et E

deux points tels que :  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

**Exercice8 :** ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

**Exercice9 :** ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  positif et Soit  $r$  la rotation de centre A et

d'angle  $\frac{\pi}{2}$

1) déterminer la nature de la transformation suivante :  $S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$

1) on considère les rotations suivantes :  $r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$

et  $r'\left(B; \frac{\pi}{2}\right)$  et  $r''\left(C; -\frac{\pi}{2}\right)$

déterminer la nature des transformations suivante :  $r \circ r'$  et  $r \circ r''$

**Exercice10 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  négatif. Soient M, N, P et Q quatre

points dans le plan tels que :  $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}$  et

$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$

la droite  $(AN)$  coupe les droites  $(DM)$  et  $(BP)$

Respectivement en E et F

la droite  $(CQ)$  coupe les droites  $(DM)$  et  $(BP)$

Respectivement en H et G

Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\pi/2$

1) Faire une figure dans le cas ou :  $AB = 6cm$

2) Montrer que :  $r(M) = N$  et  $r(N) = P$  et  $r(P) = Q$

et  $r(Q) = M$

3) a) Montrer que :  $r(F) = G$

b) en déduire que : le triangle  $FOG$  est isocèle et rectangle en  $O$

4) a) calculer :  $(r \circ r)(F)$  et  $(r \circ r)(E)$

4) b) en déduire que : les segments  $[EG]$  et  $[FH]$  ont le même milieu

5) Montrer que :  $EFGH$  est un carré

**Exercice11** :  $ABCD$  est un carré de centre  $O$

tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \pi/2[2\pi]$ . Soient  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectivement des segments  $[AB]$  et  $[BC]$  et  $[CD]$  et  $[DA]$ .

1) Déterminer les mesures des angles suivants :

a)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  b)  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$  c)  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$  d)  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$

2) soit  $S_{(AB)}$  la symétrie axiale d'axe  $(AB)$

soit  $r_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)}$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/2$

et  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a)  $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$  b)  $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

c)  $H = r_{(D; \pi)} \circ r_{(A; \pi)}$  d)  $K = r_{\left(C; \frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{(D; \pi)} \circ r_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)}$

**Exercice12** :  $ABC$  est un triangle rectangles en  $A$

tel que :  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \alpha[2\pi]$  et  $\alpha > 0$

Soit  $r$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\alpha$ .

1) Construire les points  $E$  et  $F$  tel que :  $r(A) = E$  et  $r(C) = F$

2) Montrer que  $(EF) \perp (BC)$

3) Soit  $(AC) \cap (EF) = \{I\}$  et  $r(I) = J$

a) Montrer que les points  $E$  ;  $F$  et  $J$  sont alignés

b) Montrer que  $E$  est le milieu du segment  $[IJ]$ .

4) Soit  $(AB) \cap (IJ) = \{K\}$  Montrer que  $r(K) = C$

**Exercice13** :  $ABC$  est un triangle équilatéral

tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et  $O$  le centre de gravité

du triangle  $ABC$

Et  $I$  le milieu du segment  $[IJ]$ .

1) déterminer une droite  $(D)$  tel que :

$$r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right) = S_{(D)} \circ S_{(BO)}$$

2) déterminer les droites  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  tel que :

$$r\left(O; \frac{2\pi}{3}\right) = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$$

3) déterminer la nature de la transformation suivante :

$$S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$$

**Exercice14** :  $ABC$  est un triangle tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ et } D \text{ l'image de } B \text{ par symétries}$$

orthogonales d'axe  $(AC)$  et  $E$  l'image de  $C$  par symétries orthogonales d'axe  $(AD)$

$$\text{Montrer que } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA})[2\pi]$$



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs  
et exercices

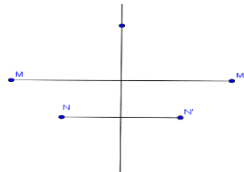
Que l'on devient un mathématicien

# LA ROTATION DANS LE PLAN

## 1) RAPPELLES ET COMPLEMENTS

### 1) La symétrie axiale.

**Définition/** Soit  $(D)$  une droite donnée. On dit que le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $(D)$



1° si  $M' = M$  si  $M \in (D)$

2°  $(D)$  est la médiatrice du segment  $[MM']$  si  $M \notin (D)$ .

La relation qui lie le point  $M$  à  $M'$  s'appelle :

**la symétrie axiale d'axe  $(D)$**  ; se note par  $S_{(D)}$ .

On écrit :  $S_{(D)}(M) = M'$ .

### Remarques :

1) Si  $M \notin (D)$  alors  $M' = S_{(D)}(M) \neq M$  et  $(D)$  est la médiatrice du segment  $[MM']$

C'est-à-dire passe par  $I$  milieu de  $[MM']$  et perpendiculaire à  $(MM')$ .

2) Si  $N \in (D)$  alors  $S_{(D)}(N) = N$  on dit que  $N$  est invariant par  $S_{(D)}$

3) Inversement si un point  $N$  est invariant par  $S_{(D)}$  alors  $N \in (D)$

**Propriétés :** La symétrie axiale conserve :

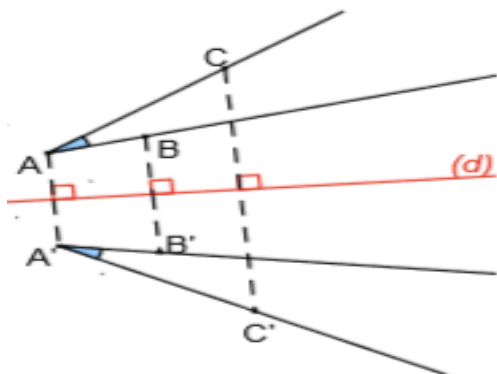
1) Les distances : si  $M' = S_{(D)}(M)$  et  $N' = S_{(D)}(N)$  alors  $MN = M'N'$

2) Le milieu d'un segment et en générale le barycentre d'un système pondéré.

3) les mesures des angles **géométriques**

4) Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La symétrie axiale inverse les mesures des



angles orientés :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})[2\pi]$

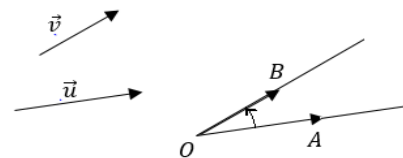
**Propriété :** La symétrie axiale  $S_{(D)}$  est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

**Preuve :**  $S_{(D)}(M) = M' \Leftrightarrow S_{(D)}(M') = M$

### 2) Les angles orientés

**Définition :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et soient  $A$  et  $B$



deux points du plan orienté tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  l'angle orienté des demis droites  $[OA)$  ;

$[OB)$  s'appelle aussi angle orienté des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on le note par :  $(\vec{u}; \vec{v})$ . la mesure de l'angle

orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$  est la mesure de l'angle orienté

$([OA), [OB))$  et se note par  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

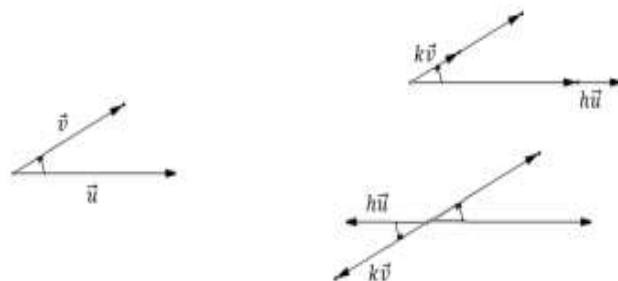
**Propriétés :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et  $h$  et  $k$  deux réels non nuls ; on a :

$$(\vec{v}; \vec{u}) \equiv -(\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$

$$1) \text{ si } hk > 0 \text{ alors : } (k\vec{u}; h\vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$

$$2) \text{ si } hk < 0 \text{ alors : } (k\vec{u}; h\vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$



## II) LA ROTATION DANS LE PLAN

### 1) Définition :

#### 1.1 Composition de deux symétries axiales

**Activité :** Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes en  $O$  ;  $M_1 = S_{(\Delta)}(M)$  et  $M' = S_{(\Delta')}(M_1)$  et soit

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha[2\pi]$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta')$

1- Quelle est l'application qui transforme  $M$  en  $M'$ .

2- Montrer que  $OM = OM'$

3- Montrer que pour tout  $M$  dans le plan on a :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv 2\alpha[2\pi]$$

**Propriété :** Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes en  $O$  ;  $S_{(\Delta)}$  et  $S_{(\Delta')}$  les symétries axiales d'axes respectifs  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$

soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha[2\pi]$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta')$ .

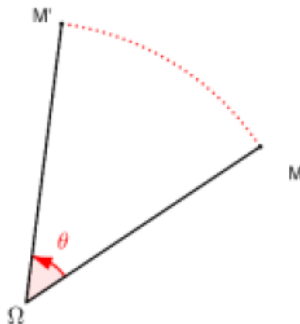
L'application  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  transforme le point  $M$  en  $M'$

$$\text{tel que : } \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv 2\alpha[2\pi] \end{cases}$$

L'application  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  s'appelle la rotation de centre  $O$  et d'angle  $2\alpha$

#### 1.2 Définition de la rotation.

**Définition :** Soit  $\Omega$  un point dans le plan et  $\theta$  un nombre réel, la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est l'application qui transforme tout point  $M$  en  $M'$  tel que :



$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

On la note par :  $R(\Omega, \theta)$

**Remarque :** Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le seul point invariant.

**Exemples :** 1) La symétrie centrale  $S_O$  est la Rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi$



2) L'identité  $Id_P$  est la rotation d'angle nul.

(Tous les points de  $(P)$  sont centre de cette rotation)

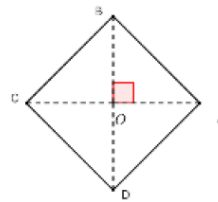
**Exercice1 :** ABCD est un carré de centre  $O$  tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  positif. Soit  $r_A$  la rotation de centre  $A$

et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r_O$  une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

1) Déterminer  $r_A(A)$ ;  $r_A(B)$ ;  $r_A(D)$ ,

2) Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = B$ ?

Comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $r_O(A) = C$ ?



**Solution :**  $r_A\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$  et

$r_O(O; \alpha)$

•  $r_A(A) = A$  Car le centre est le seul point invariant.

•  $r_A(B) = D$  Car  $\begin{cases} AB = AD \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

•  $r_A(D) = B'$  avec  $B'$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $A$

$$2) r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$$

### 2) Propriétés de la rotation

Figure1

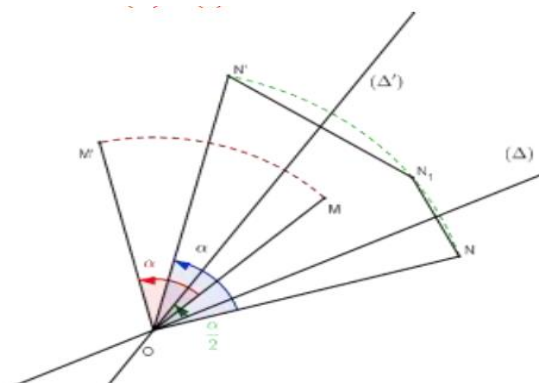
#### 2.1 La décomposition d'une rotation

Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$

1)  $(\Delta)$  une droite quelconque qui passe par  $O$  et  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède  $(S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)})$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $2 \frac{\alpha}{2} = \alpha$

**Donc :**  $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = R$ . (Figure 1)



2)  $(\Delta)$  une droite quelconque qui passe par  $O$  et  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par

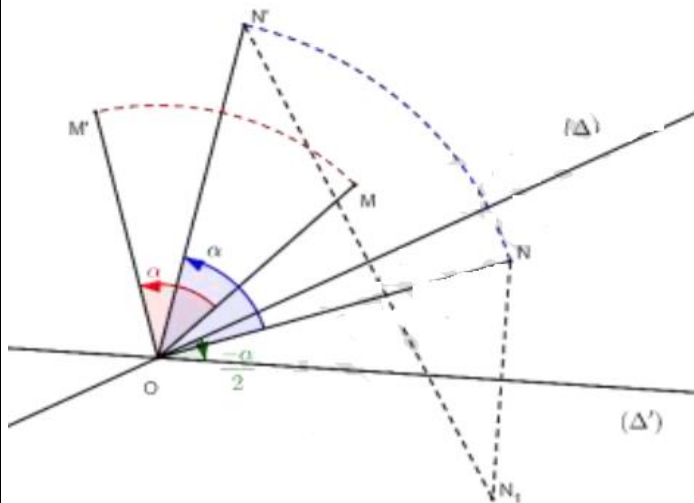
la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède (composition de deux symétries axiales)

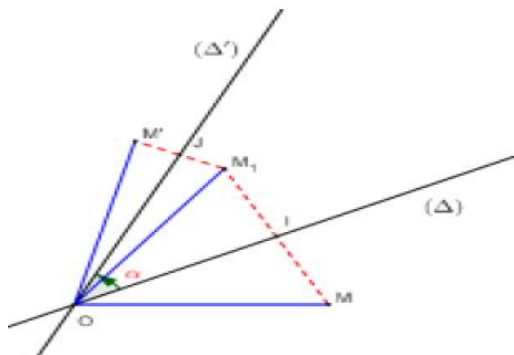
$S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$  est la rotation de centre  $O$

et d'angle  $2\frac{\alpha}{2} = \alpha$

**Donc :**  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = R$ . (figure 2)



**Propriété :** Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et



d'angle  $\alpha$  ; la rotation  $R$  peut-être décomposée comme suite :

1)  $R = S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$  où  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle :  $\frac{\alpha}{2}$

2)  $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$  où  $(\Delta')$  l'image de  $(\Delta)$  par la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle :  $-\frac{\alpha}{2}$

**Exercice2 :**

ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  positif et Soit

$r$  la rotation de centre A et d'angle  $\pi/2$

Décomposer la rotation  $r$  en composée de deux symétries orthogonales

**Solution :**  $r = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$  car  $(AD) \cap (AC) = \{A\}$

$$\text{et } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{OU } r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \text{ car } (AB) \cap (AC) = \{A\}$$

$$\text{et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

## 2.2 Propriété d'une rotation.

Puisque toute rotation est la composition de deux symétries axiales on peut en déduire les propriétés suivantes :

1) La rotation est une isométrie (elle conserve les distances) : si  $R(A) = A'$  et  $R(B) = B'$

Alors  $A'B' = AB$

2) La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points

3) La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.

4) La rotation conserve les mesures des angles géométriques

5) La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

## Applications :

**Exercice3 :** ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1) Montrer que :  $BE = CD$

2) Montrer que :

$$(BE) \perp (CD)$$

## Solution :

Soit  $r$  la rotation de

centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

$$\text{On a : } \begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

donc :  $r(D) = B$  ❶

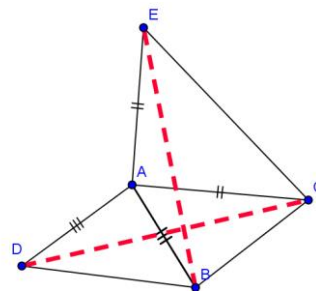
$$\text{On a : } \begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ donc : } \text{❷ } r(C) = E$$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de ❶ et ❷ en déduit que  $BE = CD$

2) on a  $r(D) = B$  et  $r(C) = E$

Donc :  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}) \equiv \frac{\pi}{2}$  par suite :  $(BE) \perp (CD)$





**Exercice4 :** ABC est un triangle tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  positif. On construit à l'extérieur les carrés ABDE et ACFG

Soit  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

déterminer :  $r(E)$  et  $r(C)$

Et Montrer que :  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$

**Solution :**

$$\text{on a : } \begin{cases} AE = AB \\ (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

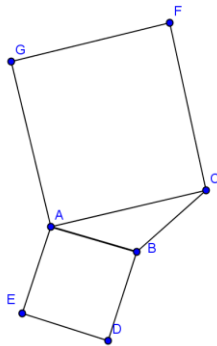
Donc :  $r(E) = B$  ❶

$$\text{Et on a : } \begin{cases} AC = AG \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Donc : ❷  $r(C) = G$

Et on a :  $r(A) = A$  ❸ car A le centre de la rotation

De : ❶ et ❷ et ❸ en déduit que  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$



**Exercice5 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  positif.

I et J deux points tels que :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$  et

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

Montrer que  $(OI) \perp (OJ)$  et  $OI = OJ$

**Solution :** il suffit de montrer

que :  $r(I) = J$  ????

On pose :  $r(I) = I'$

$$\text{On a : } \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ donc } r(A) = B$$

$r(A) = B$

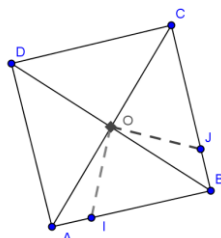
Et on a :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$  donc :  $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  ❶ car la

rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que :  $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$  ❷

De ❶ et ❷ en déduit que  $\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{BJ}$  donc  $I' = J$

Donc  $r(I) = J$  par suite :  $\begin{cases} OI = OJ \\ (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$



**Exercice6 :** ABCD est un carré de centre O tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  positif. Soit (D) la droite

parallèle à (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . E et F les images M et N

respectivement Par la rotation  $r$

1) Faire une figure et Montrer que  $(EF) \perp (MN)$

2) Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation  $r$

3) Montrer que  $DN = FA$  et  $(EF) \parallel (AC)$

**Solution :1)**

on a : ❶  $r(M) = E$

et :  $r(N) = F$  ❷

de ❶ et ❷ en déduit

que:

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

donc :  $(EF) \perp (MN)$

$$2) \text{ on a : } \begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Donc :  $r(B) = C$  ❶

$$\text{Et on a : } \begin{cases} OD = OA \\ (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ donc } r(D) = A \text{ ❷}$$

de ❶ et ❷ en déduit que:  $r((BD)) = (AC)$

3)  $DN = FA$  ???

on a : ❶  $r(D) = A$  et ❷  $r(N) = F$

donc :  $DN = FA$

$(EF) \parallel (AC)$  ???

On a :  $(MN) \parallel (BD)$  et  $r((BD)) = (AC)$  et

$r((MN)) = (EF)$

Donc :  $(EF) \parallel (AC)$  car la rotation conserve le parallélisme

**Exercice7 :** ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  positif et O le milieu du segment [BC]. D et E

deux points tels que :  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$

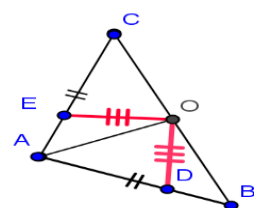
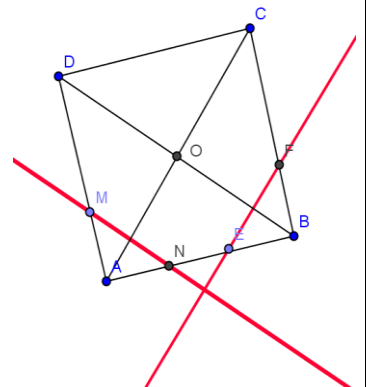
Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

**Solution :** il suffit de

montrer que :  $r(E) = D$  ????

On pose :  $r(E) = E'$

$$\text{On a : } \begin{cases} OA = OC \\ (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$



Donc :  $r(C) = A$  ❶

Et on a :  $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$  donc :  $r(A) = B$  ❷

Et on a :  $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$  ❸

De ❶ et ❷ et ❸ : en déduit que :  $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  ❹ car la

rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que :  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  ❺

De ❹ et ❺ en déduit que :  $\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{AD}$  cad  $E' = D$

Donc :  $r(E) = D$  par suite :  $\begin{cases} OE = OD \\ (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc  $ODE$  est un triangle isocèles et rectangles en  $O$

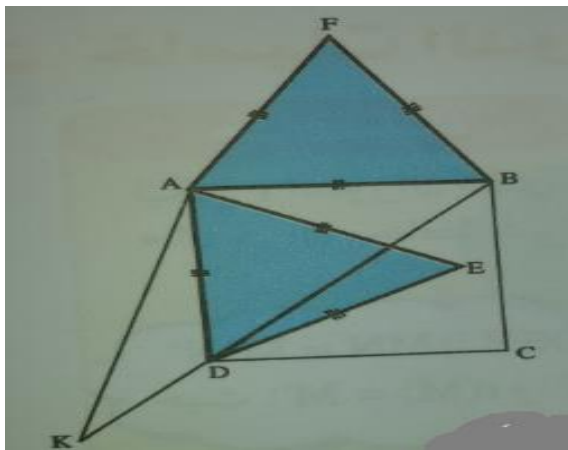
**Exercice 8** : ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

**Solution** : soit  $r$  la rotation de centre A

et



d'angle  $\frac{\pi}{3}$  :  $r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par  $r$

On a :  $r(B) = F$

Car  $\begin{cases} AB = AF \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

Et on a :  $r(D) = E$  Car  $\begin{cases} AD = AE \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

Et on a :  $r(K) = C$

donc :  $AK = AC$  et  $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

puisque :  $AB = BC$  donc  $B$  appartient à la médiatrice du segment  $[AC]$

et  $AD = DC$  donc  $D$  appartient à la médiatrice du segment  $[AC]$

et on a :  $AK = AC$  et  $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

donc :  $AKC$  est équilatéral donc  $K$  appartient à la médiatrice du segment  $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors : les points : E et C et F sont alignés

**Propriété** : La rotation  $R(\Omega, \theta)$  est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection  $R(\Omega, -\theta)$

**Preuve** :  $R(\Omega, \theta)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(\Omega, -\theta)(M') = M$

**Propriété** : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit  $R(\Omega, \theta)$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$

si  $R(M) = M'$  et  $R(N) = N'$  alors  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \theta [2\pi]$

**Preuve** : On a :

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) + (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) [2\pi]$   
 $\equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) [2\pi]$  car :  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{\Omega M'}) [2\pi]$

(la rotation conserve la mesure des angles orientés)

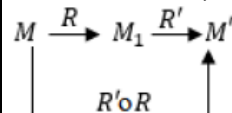
D'où :  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv 0 [2\pi]$

### III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

#### 1) Composition de deux rotations de même centre

Soient  $R(\Omega, \alpha)$  et  $R'(\Omega, \beta)$  deux rotations de centre  $\Omega$  ; Posons  $R(M) = M_1$  et  $R(M_1) = M'$

$M \xrightarrow{R} M_1 \xrightarrow{R'} M'$



$R(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$

$R(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \beta [2\pi] \end{cases}$

On en déduit que :  $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha + \beta [2\pi] \end{cases}$

Et par suite :  $R''(\Omega, \alpha + \beta)(M) = M'$

et  $(R'(\Omega, \beta) \circ R(\Omega, \alpha))(M) = M'$

Donc  $R'(\Omega, \beta) \circ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, \alpha + \beta)$ .

**Propriété :** La composition de deux rotations  $R(\Omega, \alpha)$  et  $R'(\Omega, \beta)$  de même centre  $\Omega$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $(\alpha + \beta)$  :

$R'(\Omega, \beta) \circ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, \alpha + \beta)$ .

**Remarque :** On sait que la rotation  $R(\Omega, \alpha)$  est une bijection et sa bijection

Réciproque est  $R'(\Omega, -\alpha)$

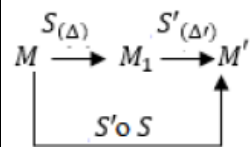
Donc :  $R'(\Omega, -\alpha) \circ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, 0) = Id_P$

## 2) Composition de deux rotations de centres différents.

### 2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles

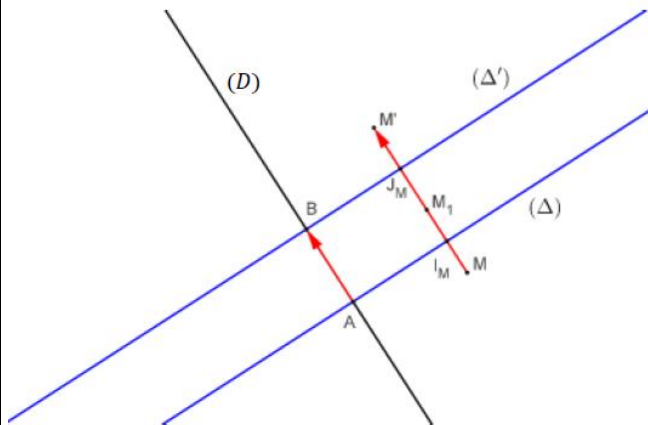
Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites parallèles dans le plan.  $S_{(\Delta)}$  et  $S'_{(\Delta')}$  les symétries

Axiales d'axes respectifs  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  On a :



Soit  $(D)$  une droite perpendiculaire à  $(\Delta)$

$A$  et  $B$  les intersections respectives de  $(D)$  et  $(\Delta)$  et de  $(D)$  et  $(\Delta')$



Soient  $I_M$  et  $J_M$  les milieux respectifs de  $[MM_1]$  et  $[M_1M']$ , on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{I_M M_1} + 2\overrightarrow{M_1 J_M}$$

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{I_M J_M} = 2\overrightarrow{AB}$$

**Propriété :** La composition de deux symétries axiales  $S_{(\Delta)}$  et  $S'_{(\Delta')}$

d'axes parallèles est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  où  $A$  et  $B$  les intersections respectives de  $(D)$  et

$(\Delta)$  et de  $(D)$  et  $(\Delta')$  avec  $(D)$  une droite perpendiculaire à  $(\Delta)$

si  $(\Delta) \parallel (\Delta')$  alors :  $S'_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

### 2.2 Composition de deux rotations de centres différents.

Soient  $R(O, \alpha)$  et  $R(\Omega, \beta)$  deux rotations dans le plan où  $\Omega \neq O$  on

S'intéresse à la nature de la transformation  $R' \circ R$

On sait que toute rotation peut être décomposée en composée

de deux symétries axiales.

Posons  $(\Delta) = (O\Omega)$

On a :  $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}$  où  $(\Delta_1)$  est l'image de la droite  $(\Delta)$  par la

rotation  $r_1$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\alpha}{2}$

D'autre part :  $R' = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}$  où  $(\Delta_2)$  est l'image de la droite  $(\Delta)$  par la

rotation  $r_2$  de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\beta}{2}$

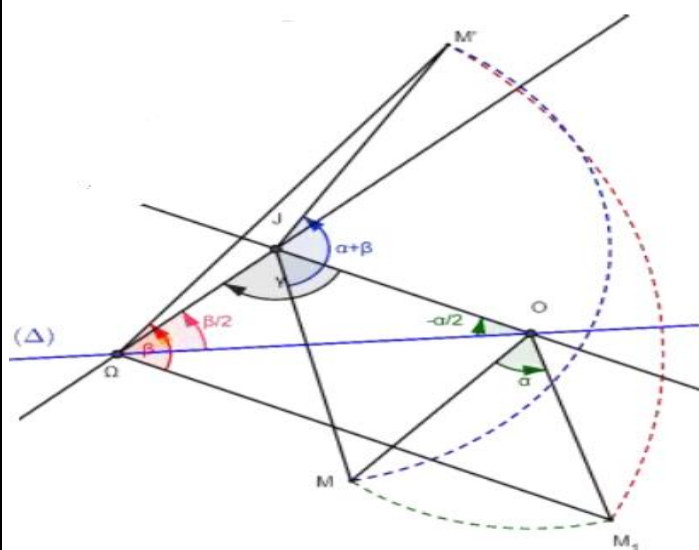
D'où :  $R' \circ R = (S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}) \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)})$

$R' \circ R = (S_{(\Delta_2)} \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}) \circ S_{(\Delta_1)})$  (La composition est associative)

$R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  car  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} = Id_P$

La nature de  $R' \circ R$  **dépend de la position relative de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$**

**Si  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  se coupent en  $J$  (figure 1)**





Dans ce cas  $R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  est une rotation de centre  $J$  et d'angle  $2\left(\frac{\vec{u}}{v}\right)$  modulo  $2\pi$  où  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $(\Delta_1)$  et  $\vec{v}$  vecteur directeur de  $(\Delta_2)$ .

Détermination de l'angle de la rotation :  $2\gamma$

On a :  $-\gamma - \frac{-\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \equiv \pi[2\pi]$  (lire tous les angles dans le sens trigonométrique)

d'où :  $\gamma \equiv \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \pi[2\pi]$  car  $(-\pi \equiv \pi[2\pi])$

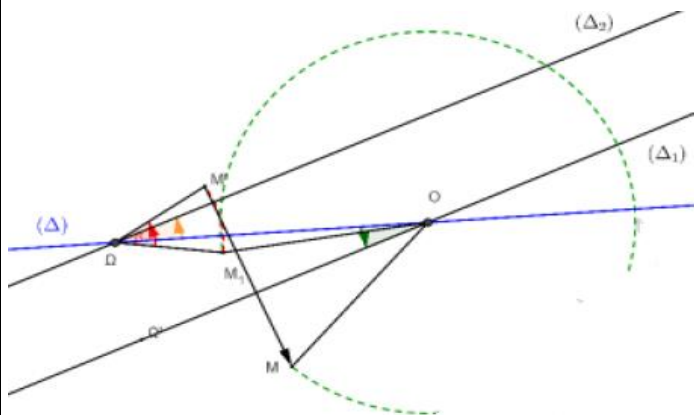
Finalement :  $2\gamma = \alpha + \beta [2\pi]$  car  $(2\pi \equiv 0[2\pi])$

Si  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles (figure 2)

Dans ce cas  $R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$  est une translation.

Quand est ce que  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles ?

$(\Delta) \parallel (\Delta') \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\beta}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \alpha + \beta \equiv 0[2\pi]$



(Figure 2)

**Théorème :** Soient  $R(O, \alpha)$  et  $R(\Omega, \beta)$  deux rotations dans le plan où  $\Omega \neq O$

1° Si  $\alpha + \beta \neq 2k\pi$  alors  $R' \circ R$  est une **rotation** d'angle  $\alpha + \beta$

2° Si  $\alpha + \beta = 2k\pi$  alors  $R' \circ R$  est une **translation** dans le plan.

**Remarque :** Pour déterminer les éléments de la rotation ou de la translation il est indispensable de maîtriser toutes les étapes de la démonstration.

**Exercice9 :** ABCD est un carré tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

positif et Soit  $r$  la rotation de centre A et

d'angle  $\frac{\pi}{2}$

1) déterminer la nature de la transformation suivante :  $S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$

1) on considère les rotations suivantes :  $r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$

et  $r'\left(B; \frac{\pi}{2}\right)$  et  $r''\left(C; -\frac{\pi}{2}\right)$

déterminer la nature des transformations suivante :  $r \circ r'$  et  $r \circ r''$

**Solution : 1)**  $S_{(AD)} \circ S_{(AB)} = r\left(A; 2\frac{\pi}{2}\right) = r(A; \pi) = S_A$

2) a)  $r \circ r'$  on a  $A \neq B$  et  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \neq 2k\pi$  donc c'est

une rotation  $r\left(?, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = r(?, \pi)$  cad une symétrie central

Déterminons le centre de la rotation  $r \circ r'$  ?

On a :  $r \circ r' = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$

Et puisque :  $(AC) \cap (BD) = \{O\}$

Alors le centre de la rotation est le point O

2) b)  $r \circ r''$  ???

on a  $A \neq C$  et  $\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$  donc c'est une

translation

Déterminons le vecteur de la translation  $r \circ r''$  ?

On a :  $r \circ r''(C) = r(r''(C)) = r(C) = C'$

Avec :  $\begin{cases} AC = AC' \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc  $r \circ r''$  est une translation de vecteur  $\overrightarrow{CC'}$

**Exercice10 :** ABCD est un carré de centre O

tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  négatif. Soient M, N, P et Q quatre

points dans le plan tels que :  $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$  et

$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite  $(AN)$  coupe les droites  $(DM)$  et  $(BP)$

Respectivement en E et F

la droite  $(CQ)$  coupe les droites  $(DM)$  et  $(BP)$

Respectivement en H et G

Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $-\pi/2$

1) Faire une figure dans le cas où :  $AB = 6cm$

2) Montrer que :  $r(M) = N$  et  $r(N) = P$  et  $r(P) = Q$

et  $r(Q) = M$

3) a) Montrer que :  $r(F) = G$

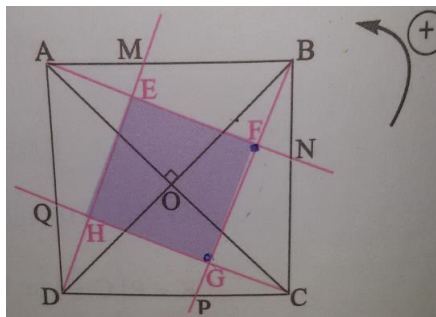
b) en déduire que : le triangle  $FOG$  est isocèle et rectangle en O

4) a) calculer :  $(r \circ r)(F)$  et  $(r \circ r)(E)$

4) b) en déduire que : les segments  $[EG]$  et  $[FH]$  ont le même milieu

5) Montrer que : EFGH est un carré

### Solution :1)



2) on a  $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$  donc :  $r(A) = B$

$\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$  donc :  $r(B) = C$

Et puisque  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors :  $r(A)r(M) = \frac{1}{3}r(A)r(B)$

cad :  $r(M) = \frac{1}{3}r(B)$  et on a :  $r(B) = C$

donc :  $r(M) = N$

de meme : on montre que :  $r(N) = P$  et  $r(P) = Q$  et  $r(Q) = M$

3) a) on montre que :  $r(F) = G$  ?

Puisque :  $r(N) = P$  et  $r(A) = B$  alors :  $r((AN)) = (BP)$

Et Puisque :  $r(P) = Q$  et  $r(A) = B$  alors :

$r((AN)) = (BP)$

Et puisque :  $r(P) = Q$  et  $r(B) = C$  alors :

$r((BP)) = (QC)$

Donc :  $r((AN) \cap (BP)) = r((AN)) \cap r((BP))$  car  $r$  est une application injective

Donc :  $r(\{F\}) = (BP) \cap (QC) = \{G\}$  par suite :  $r(F) = G$

3)b) On a :  $r(F) = G$  donc :  $\begin{cases} OF = OG \\ (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle  $FOG$  est isocèle et rectangle en  $O$

4)a) On a :  $r(C) = D$  et  $r(Q) = M$  et  $r(B) = C$

donc :  $r((CQ)) = (DM)$  et puisque :  $r((BP)) = (QC)$

alors :  $r((CQ) \cap (BP)) = (DM) \cap (QC)$  cad :

$r(\{G\}) = \{H\}$  donc :  $r(G) = H$

on a :  $(r \circ r)(F) = r(r(F)) = r(G) = H$  et on a :

$r((AN)) = (BP)$  et  $r((DM)) = (AN)$

donc :  $r((AN) \cap (DM)) = (AN) \cap (BP)$

donc :  $r(E) = F$

On a :  $(r \circ r)(EF) = r(r(E)) = r(F) = G$

4)b) puisque  $r$  est une rotation d'angle :  $-\pi/2$

alors :  $r \circ r$  est une rotation d'angle :

$2 \times (-\pi/2) = -\pi$  donc  $r \circ r$  est une symétrie central et soit  $K$  son centre

Puisque on a :  $(r \circ r)(F) = H$  et  $(r \circ r)(E) = G$

Alors :  $K$  est le milieu des segments  $[EG]$  et  $[FH]$

Donc : les segments  $[EG]$  et  $[FH]$  ont les mêmes milieux

4) puisque les segments  $[EG]$  et  $[FH]$  ont les mêmes milieux alors :  $EFGH$  est un parallélogramme et on a aussi :  $r(F) = G$  et

$r(E) = F$  donc :  $EF = FG$  et  $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc :  $EFGH$  est un carré.

**Exercice11** :  $ABCD$  est un carré de centre  $O$

tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pi/2[2\pi]$ . Soient  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectivement des segments  $[AB]$  et  $[BC]$  et  $[CD]$  et  $[DA]$ .

1) Déterminer les mesures des angles suivants :

a)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  b)  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$  c)  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$  d)  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$

2) soit  $S_{(AB)}$  la symétrie axiale d'axe  $(AB)$

soit  $r_{(A; \frac{\pi}{2})}$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/2$

et  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a)  $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$  b)  $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

c)  $H = r_{(D; \pi)} \circ r_{(A; \pi)}$  d)  $K = r_{(C; \frac{\pi}{2})} \circ r_{(D; \pi)} \circ r_{(A; \frac{\pi}{2})}$

**Solution :1)** a) les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  et  $(JL)$  et  $(IK)$  sont des axes de symétries du carré  $ABCD$

On a :  $S_{(AC)}(A) = A$  et  $S_{(AC)}(C) = C$  et  $S_{(AC)}(B) = D$

Donc on déduit que :  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a :  $S_{(LJ)}(A) = D$  et  $S_{(LJ)}(C) = B$  et  $S_{(LJ)}(B) = C$

Donc on déduit que :  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})[2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Puisque la rotation conserve la mesure de l'angle orienté et on a :  $r_{(O;\pi)}(A) = C$  et  $r_{(O;\pi)}(B) = D$  et

$r_{(O;\pi)}(C) = A$  alors :  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$

Donc :  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

d) puisque :  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$  alors :  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

2)a)  $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$  ??

On a :  $(AC) \cap (BD) = \{O\}$

Donc  $F$  est la composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en O

Donc :  $F$  est rotation de centre O

Et puisque :  $(AC) \perp (BD)$  alors :  $F$  est une symétrie central de centre O ou  $F = r_{(O;\pi)}$

2)b)  $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$  ??

On a :  $(AB) \cap (AC) = \{A\}$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Donc  $G$  est la composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en A

Donc :  $G$  est rotation de centre A

$G = r_{(O;2\frac{\pi}{4})} = r_{(O;\frac{\pi}{2})}$

2)c)  $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)}$  ??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$  et  $r_{(A;\pi)} = S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$

Donc :  $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$

Et puisque :  $S_{(DA)} \circ S_{(DA)} = I_P$  alors :  $H = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$

Et puisque :  $(DC) \parallel (AB)$  alors :  $H$  est une translation et puisque :  $A \in (AB)$  et D la projection du point D sur la droite  $(DC)$  alors :

$S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overline{AD}}$  donc :  $H = t_{2\overline{AD}}$

d)  $K = r_{(C;\frac{\pi}{2})} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\frac{\pi}{2})}$  ??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{(C;\frac{\pi}{2})} = S_{(CA)} \circ S_{(CD)}$  et  $r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$  car

$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Et on a :  $r_{(A;\frac{\pi}{2})} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$

Donc :

$K = S_{(CA)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AC)} = S_{(CA)} \circ I_P \circ I_P \circ S_{(AC)}$

$K = S_{(CA)} \circ S_{(AC)} = I_P$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien

