

Exercice 1 : Opérations sur les vecteurs

On donne les trois vecteurs $\vec{V}_1(1, 1, 0)$, $\vec{V}_2(0, 1, 0)$ et $\vec{V}_3(0, 0, 2)$.

1. Calculer les normes $\|\vec{V}_1\|$, $\|\vec{V}_2\|$ et $\|\vec{V}_3\|$. En déduire les vecteurs unitaires \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 des directions respectivement de \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et de \vec{V}_3 .
2. Calculer $\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$, sachant que l'angle correspondant est compris entre 0 et π .
3. Calculer $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ et $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$. Que représente chacune de ces trois grandeurs ?

Exercice 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point M dans le repère $\mathcal{R}(O, xyz)$. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Calculer

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi}.$$

2. En déduire $d\vec{e}_\rho$ et $d\vec{e}_\varphi$ dans la base cartésienne.
3. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme

$$d\vec{e}_\rho = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \quad \text{et} \quad d\vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi$$

en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base cylindrique par rapport à \mathcal{R} . Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans \mathcal{R} .

4. Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à \mathcal{R} ? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}.$$

Pour les exercices 3,4 et 5, calculer les expressions littérales des grandeurs demandées et faire l'application numérique.

Exercice 3 : Mouvement rectiligne

On effectue un test d'accélération sur une voiture arrêtée au départ (vitesse initiale $v_0 = 0$). La route est rectiligne.

1. La voiture est chronométrée à 20s au bout d'une distance $D = 140\text{m}$.
1-a) Déterminer l'expression de l'accélération γ , supposée constante.
1-b) Déterminer l'expression de la vitesse v_D atteinte à la distance D .
2. Calculer la distance d'arrêt L pour une décélération de 8ms^{-2} ?

Exercice 4 : Excès de vitesse

Un conducteur roule à une vitesse constante $v_0 = 120 \text{ km h}^{-1}$ sur une route rectiligne dépassant la limite autorisée. Un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse 100 km h^{-1} au bout de 12s.

1. Quel sera le temps nécessaire au gendarme pour rattraper la voiture?
2. Quelle distance aura-t-il parcourue?
3. Quelle vitesse aura-t-il atteinte?

Exercice 5 : Mouvement circulaire uniforme

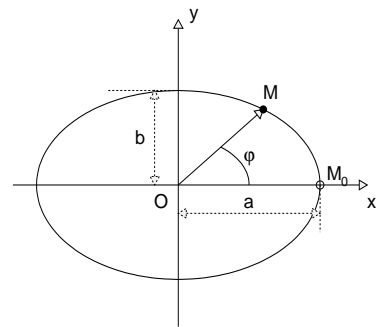
Considérons un satellite géostationnaire en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre sur une orbite de rayon r . Il est soumis à

une accélération $\gamma = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$, où $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ et $R = 6400 \text{ km}$, le rayon de la Terre. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle même.

1. Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes. En déduire la vitesse angulaire Ω .
2. Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Exercice 6 : Mouvement sur une ellipse

Un point matériel M se déplace sur une ellipse d'équation en coordonnées cartésiennes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, voir figure ci-contre. la direction de \overrightarrow{OM} par rapport à l'axe Ox est repérée par l'angle φ . L'équation horaire du mouvement de M peut se mettre sous la forme $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ et $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \psi)$ où l'on suppose que ω est une constante. A l'instant $t = 0$, M se trouvait en M_0 .



1. Déterminer x_0 , ϕ et ψ . En déduire y_0 .
2. Déterminer les composantes, et ce dans la base cartésienne, de la vitesse (\dot{x}, \dot{y}) et de l'accélération (\ddot{x}, \ddot{y}) .
3. Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme $\vec{\gamma} = -k\overrightarrow{OM}$ où k est à déterminer.