

# Chapitre 4 Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs (1 Semaine)

Equations de Maxwell dans un conducteur, Équation de propagation Effet de peau, Réflexion sur un plan conducteur.

## 1. Introduction

### Chapitre 3. Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs (2 Semaines)

Effet de peau, Réflexion sur des paires conductrices.

En tout point d'un conducteur, il existe une relation entre le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  et le champ électrique total  $\vec{E}$  ( $\vec{E}$  est la somme du champ électrostatique  $\vec{E}_s$  et du champ électromoteur  $\vec{E}_i$ ) dite relation d'Ohm-Kirchhoff :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Où  $\sigma$  est la conductivité du milieu conducteur ; elle s'exprime en siemens par mètre ( $S \cdot m^{-1}$ ). Cas particuliers : Isolants :  $\sigma = 0$  – Conducteurs parfaits :  $\sigma \rightarrow \infty$

## 1. Onde électromagnétique dans un conducteur

### 1.1. Équation de propagation

On considère les équations de Maxwell dans un milieu conducteur dans lequel la loi d'Ohm locale est vérifiée :  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

La conductivité  $\sigma$  est une constante. La loi d'Ohm écrite sous cette forme est valable pour les métaux dans le domaine des radiofréquences et des micro-ondes. En réalité, la conductivité dépend notablement de la fréquence dans les très hautes fréquences (Téra hertz et infrarouges).

On suppose par ailleurs que la densité de charge est nulle. La seule équation de Maxwell différente de celle du vide est donc l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Le terme de droite comporte entre parenthèse le courant de conduction et un terme de gauche homogène à une densité de courant, appelé courant de déplacement. Pour comparer ces deux termes, on se place en régime sinusoïdal permanent :  $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 (\sigma - \epsilon_0 i\omega) \vec{E}$

Écrite sous cette forme, l'équation de Maxwell-Ampère est plus générale que sous sa forme initiale, car il est alors possible d'introduire une conductivité qui dépend de la pulsation. Néanmoins, cela n'est pas nécessaire dans le domaine des radiofréquences.

Pour un métal dans le domaine des radiofréquences et des micro-ondes, on vérifie que :  $\epsilon_0 \omega \ll \sigma$

Le courant de déplacement est donc très largement négligeable par rapport au courant de conduction, et l'équation de Maxwell peut s'écrire sous sa forme approximative (régime quasi-stationnaire) :

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

En éliminant le champ magnétique des équations de Maxwell, on obtient l'équation de propagation

vérifiée par le champ électrique :  $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Cette équation différentielle est tout à fait différente de l'équation des ondes (équation de d'Alembert), car la dérivée temporelle est une dérivée première. Elle est appelée équation de diffusion. On la retrouve par exemple dans les phénomènes de diffusion de particules ou de diffusion thermique.

### Remarques

- si  $\sigma \ll \omega \epsilon$  : conduction négligeable, bon isolant, équations analogues à celles du vide,
- si  $\sigma \gg \omega \epsilon$  : bon conducteur (ARQS),
- si  $\sigma \cong \omega \epsilon$  : il faut prendre en compte les deux courants.

Les notions de bons conducteurs et bons isolants dépendent de la fréquence : un même matériau peut être bon conducteur à basse fréquence, et bon isolant à haute fréquence. Par exemple le cuivre à température ambiante devient isolant à partir de 1016 Hz, l'eau de mer à partir de 107 Hz

En régime sinusoïdal, l'équation s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{E} = -i\mu_0 \sigma \omega \vec{E}$$

Pour le champ magnétique :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{B}) = \overrightarrow{rot}(\mu_0 \sigma \vec{E}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\Delta \vec{B} \text{ donc : } \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \Delta \vec{B}$$

### 1.2. Effet de peau

Détermination de l'expression du champ électrique :

Afin d'étudier plus simplement le comportement du champ électromagnétique dans un conducteur en régime variable, nous allons considérer une géométrie relativement simple.

Considérons un conducteur occupant le demi-espace  $z > 0$ , le demi-espace  $z < 0$  étant vide.

En un point  $M(x,y,z)$  du conducteur, le champ électrique s'écrit donc sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, y, z, t)$$

Nous négligerons les effets de bords : les invariances suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  nous permettent d'écrire que

$$\vec{E} \text{ est indépendant de } x \text{ et } y : \vec{E}(M, t) = \vec{E}(z, t)$$

Nous supposons par ailleurs le champ électrique se propageant dans le vide ( $z < 0$ ) polarisé suivant

$$\vec{u}_x \text{ donc de la forme : } \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \text{ (réel : } \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x)$$

En  $z = 0$ , le champ électrique est donc de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t)} \vec{u}_x \text{ (réel : } \vec{E}_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x)$$

Dans ce cas :  $\vec{E}(M, t) = E(z, t) \vec{u}_x$

$$\text{L'équation de diffusion vérifiée par le champ } \vec{E} : \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Nous obtenons alors une équation scalaire vérifiée par : } \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Le conducteur étant soumis à un champ électrique incident de pulsation  $\omega$  et le champ électrique dans le conducteur vérifiant une équation différentielle linéaire, nous avons cherché, en régime permanent, une solution sinusoïdale de même pulsation : que le champ exciteur. Nous allons donc utiliser la notation complexe et écrire  $\underline{E}_x$  sous la forme :  $\underline{E}_x = \underline{E}_x(z)e^{j\omega t}$

En remplaçant alors dans l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{E}_x$ , nous pouvons alors écrire :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}(z)}{\partial z^2} = j\omega\mu_0\sigma \underline{E}(z)$$

Pour déterminer la forme de la solution, écrivons l'équation caractéristique :

$$z^2 - j\omega\mu_0\sigma = 0$$

Les deux solutions sont :  $z = \mp \sqrt{j\omega\mu_0\sigma} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\delta}$

$$i = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{4}\right) = \left(\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2$$

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$  appelée épaisseur de peau. L'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle montre que cette grandeur a la dimension d'une longueur.

Donc :  $\underline{E} = A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(-j\frac{z}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(j\frac{z}{\delta}\right)$  où A et B sont des constantes complexes.

Or le champ électrique ne peut pas diverger donc  $B = 0$  donc :  $\underline{E} = A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(-j\frac{z}{\delta}\right)$

De plus, la relation de passage du champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

La condition aux limites en  $z = 0$ , c'est-à-dire la continuité de la composante tangentielle du champ électrique donne :  $\vec{E}(0^-, t) = \vec{E}(0^+, t) = E_0 \exp(j\omega t) \vec{u}_x$ , donc :  $A = E_0$

En conséquence,  $\underline{E}_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(-j\frac{z}{\delta}\right) \exp(j\omega t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right)$

Nous pouvons alors en déduire le champ réel  $E_x = \underline{E}_x$  :  $E_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$

Donc :  $\vec{E}(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$

L'effet de peau traduit l'aptitude d'un conducteur à s'opposer à la pénétration d'un champ électromagnétique variable en son sein. Le champ électromagnétique se trouve réparti au voisinage de la surface sur une profondeur de l'ordre de  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$  appelée épaisseur de peau (terme lié au caractère superficiel de la répartition). L'effet est d'autant plus marqué que la profondeur de peau est faible (le conducteur s'oppose efficacement à la pénétration), donc que :  $\delta$  est grand. D'autre part, meilleur est le conducteur ( $\sigma$  élevé) plus l'effet de peau sera marqué.

On remarque ainsi que l'onde s'atténue sur une épaisseur de quelques épaisseurs de peau, limitant sa propagation : il s'agit d'une onde **évanescence**.

On peut noter, d'autre part, que, puisque le conducteur vérifie la loi d'Ohm,

$$\vec{j}(z, t) = \sigma E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

Les courants sont donc répartis au voisinage de la surface, sur une épaisseur de quelques épaisseurs de peau.

L'exemple du conducteur semi-infini est évidemment une simplification de la réalité mais les résultats sont généralisables à toutes les géométries usuelles de conducteurs, c'est-à-dire lorsque l'épaisseur de peau est faible devant le rayon de courbure du conducteur.

Ordre de grandeur : le diamètre d'un fil conducteur utilisé en travaux pratique est  $d \approx 1 \text{ mm}$  (( et pour le cuivre,  $\sigma \approx 6.10^7 \text{ Sm}^{-1}$ ). Déterminons le domaine de fréquences pour lequel  $\delta \ll d \Leftrightarrow$

$$\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma} \ll d^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma} \ll d^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\pi d^2 \mu_0 \sigma} \ll f \Leftrightarrow 4 \text{ kHz} \ll f$$

### Expression du champ magnétique

Pour déterminer l'expression de  $\vec{B}$ , nous allons utiliser l'équation de Maxwell – Faraday plutôt que de reprendre tout le calcul :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_0}{\delta} \begin{pmatrix} 0 \\ \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(-\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{E_0}{\delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y \\ \vec{B} &= \frac{E_0}{\omega \delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y + \vec{cte} \end{aligned}$$

Le champ électromagnétique étant exclusivement variable,  $\vec{cte} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\sqrt{2}E_0}{\omega \delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y \\ \vec{B} &= \frac{\sqrt{2}E_0}{\omega \delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y \\ \vec{B} &= \frac{\sqrt{2}E_0}{\omega \delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y \\ \vec{B} &= \frac{\sqrt{2}E_0}{\omega \delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y \end{aligned}$$

**Remarque :** il est aussi possible d'utiliser la notation complexe pour déterminer l'expression de  $\vec{B}$ .

### Relation de dispersion

La relation de dispersion lie la pulsation : au vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Pour la déterminer, il suffit d'exprimer le champ électrique sous forme complexe

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}z)) \vec{u}_x$$

Puis de remplacer le champ électrique par son expression complexe dans l'équation d'onde. Dans le cas d'une onde s'atténuant, il est nécessaire, contrairement au cas d'une onde se propageant dans le vide sans atténuation, d'utiliser un vecteur d'onde complexe.

L'équation de propagation s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Avec la notation complexe :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{\vec{E}} &= -\underline{k}^2 \underline{\vec{E}} \\ \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} &= j\omega \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

Donc  $\underline{k}^2 = j\mu_0\sigma\omega$  et donc  $\underline{k} = \frac{\sqrt{\mu_0\sigma\omega}}{\sqrt{2}}(1 - j)$  (le signe de la partie imaginaire est dû au sens de

La partie réelle du vecteur d'onde complexe traduit la propagation de l'onde et la partie imaginaire son atténuation.

## 2. Réflexion des OEM sur un plan conducteur

Une OEM plane incidente se propageant dans un diélectrique et rencontrant un milieu conducteur va donner naissance une onde réfléchi. Le champ électromagnétique en un point quelconque d'espace diélectrique résulte de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi en ce point.

La propagation d'une onde plane dans la direction Oz est régie par ces équations :

$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{H})}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{H})}{\partial t} = 0$ , avec  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$  et  $\mu = \mu_0\mu_r$  qui admette comme solution en régime sinusoïdal :

$$E(z, t) = E(z)e^{j\omega t} \text{ avec } E(z) = E_0 e^{-jkz}$$

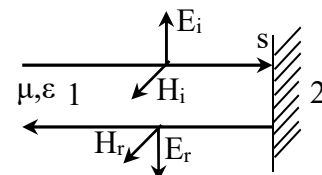
$$H(z, t) = H(z)e^{j\omega t} \text{ avec } H(z) = H_0 e^{-jkz}$$

On appliquant les conditions imposées aux limites (les surfaces de séparation diélectrique) aux champs E et B, la composante tangentielle :  $E_T = 0$  et  $H_N = 0$ .

### 2.1 Réflexion d'un incident normale

1 : milieu diélectrique et 2 : milieu conducteur parfait

La direction de propagation de l'onde incidente étant normale à la surface s. un plan d'onde quelconque de cette onde est parallèle à s, si on prend l'axe de référence Oz parallèle à la direction de propagation,  $E_i$  et  $H_i$  sont données par :



$$E_i = E_{0i} e^{j(\omega t - jkz)} \text{ et } H_i = H_{0i} e^{j(\omega t - jkz)} \cdot \frac{E_{0i}}{H_{0i}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$E_r = -E_{0i} e^{j(\omega t + jkz)} \text{ et } H_r = H_{0i} e^{j(\omega t + jkz)}$$

Calcul de champ total : l'état de l'OEM en un point d'abscisse  $z$  de diélectrique résulte de la superposition de l'onde réfléchie et l'onde incidente :  $E = E_i + E_r$

$$E = E_i + E_r = E_{0i} e^{j(\omega t - jkz)} - E_{0i} e^{j(\omega t + jkz)} = 2jE_{0i} e^{j\omega t} (e^{-jkz} + e^{+jkz}) = -2jE_{0i} \sin kz e^{j\omega t}$$

$$E = -2jE_{0i} \sin kz e^{j\omega t}$$

$$H = +2H_{0i} \cos kz e^{j\omega t}$$

$$E = 2E_{0i} \cos(kz - \frac{\pi}{2}) e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

La propagation est caractérisée par l'existence d'un régime d'ondes stationnaires pures. Les vecteurs et sont en **quadrature dans le temps et dans l'espace**.