المميز

في

الإحصاء

الصف الثالث الثانوى

٢٠١٥

أحمد الشتوى

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

أحمد الله و اشكره و أثنى عليه أن أعاننى

و وفقنى لتقديم هذا الكتاب من مجموعة

" المميز "

فى الرياضيات لأقدمه لأبنائى المتعلمين

و إخوانى المعلمين و الذى راعيت فيه

تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة و ممتعة

مدللاً بأمثلة محلولة ثم تدريبات على كيفية

الحل ثم تمارين متنوعة و متدرجة لتناسب

كل المستويات

متمنياً أن ينال رضاكم و ثقتكم التى أعتز بها

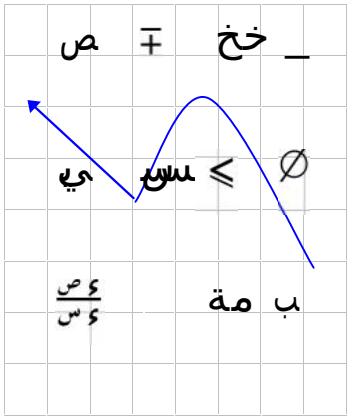
و الله لا يضيع أجر من أحسن عملا

و هو ولى التوفيق

أحمد الشنتورى

المحتويات

الموضوع	الصفحة
الإحتمال	٢
المتغيرات العشوائية و التوزيعات الإحتمالية	١٠
التوزيع الطبيعى	١٦
الإرتباط	٢٣
الإنحدار	٢٦
إرشادات التمارين	٣١



الإحتمـــــــال

مصطلحات و مفاهيم أساسية :

تعريف التجربة العشوائية :

هى تجربة نستطيع أن نحدد مقدماً (قبل إجرائها) جميع النواتج الممكنة لها و إن كنا لا نستطيع أن نتنبأ أياً من هذه النواتج سوف يتحقق فعلاً عند إجراء التجربة

فمثلا : (١) عند إلقاء قطعة نقود معدنية و ملاحظة الوجه الظاهر فالنواتج الممكنة معروفة مقدماً و هى صورة أو كتابة ، و لكننا لا نستطيع التنبؤ بصفة مؤكدة أى منهما سوف يظهر عند إلقاء قطعة النقود

(٢) عند إلقاء حجر نرد (زهر الطاولة) و ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى له فالنواتج الممكنة معروفة مقدماً و هى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ و لكننا لا نستطيع التنبؤ بصفة مؤكدة أى منهما سوف يظهر عند إلقاء حجر النرد

تعريف فضاء العينة (أو فضاء النواتج) :

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو ن (ف)

فمثلا :

(١) فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة و ملاحظة الوجه الظاهر هو :

ف = { ص ، ك } حيث : ص ترمز للصورة ، ك ترمز للكتابة

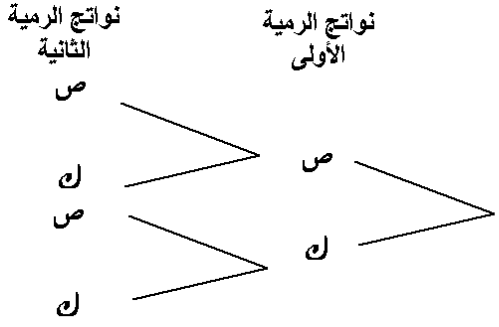
و يلاحظ أن عدد عناصر ف = ٢ و يكتب كما يلى : ن (ف) = ٢

(٢) فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتالتين" قطعتى نقود متمايزتين مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات هو :

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

حيث : ن (ف) = $٢^{٢}$ = ٤

و يمكن الحصول على نواتج هذه التجربة برسم الشجرة البيانية حيث يحدد كل مسار من المسارات عنصراً من عناصر فضاء العينة كما يلى :



(٣) فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية " ثلاث قطع متمايزة نقود مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات هو :

ف = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

حيث : ن (ف) = $٢^{٣}$ = ٨

و يمكن الحصول على عناصر فضاء العينة بواسطة الشجرة البيانية كما سبق

(٤) فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى هو :

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } حيث : ن (ف) = ٦

(٥) فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتالتين " حجرى نرد متمايزين مرة واحدة " و ملاحظة الأعداد الظاهرة على الوجه العلوى هو :

ف = { (س ، ص) : س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

أى : ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ٠٠٠٠ ، (٦ ، ٦) }

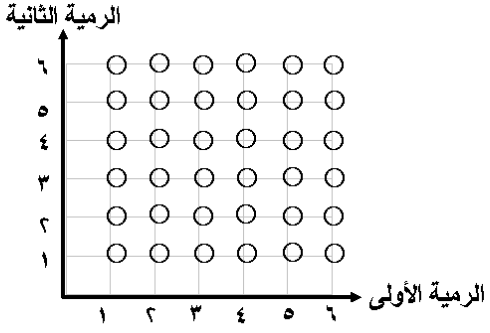
حيث : ن (ف) = $٦^{٢}$ = ٣٦

و يمكن الحصول على عناصر فضاء العينة بإحدى الطريقتين التاليتين :

جدول :

الأولى \ الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

هندسياً :



تعريف الحدث :

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

فإذا كان : أ حدث فى ف فإن : أ ⊂ ف

و عدد عناصره هو : ن (أ) أى عدد فرص وقوع الحدث أ

فمثلا :

إذا كان أ هو حدث ظهور رقم زوجى عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن : أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

لاحظ أن : أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ⊂ ف ، ن (أ) = ٣

* **الحدث المستحيل " ∅ "** : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه
* **الحدث المؤكد " ف "** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة
* **الحدث الأولى " البسيط "** : هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى
* **وقوع الحدث** : يقال أن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية هو أحد عناصر المجموعة التى تعبر عن هذا الحدث

مثال [١] فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى
أكتب كلاً من الأحداث الآتية مبيناً أياً منها يكون حدثاً مؤكداً و أيها حدثاً مستحيلاً و أيها يكون حدثاً أولياً :

أ هو حدث " الحصول على عدد أولى "
ب هو حدث " الحصول على عدد أكبر من ٣ و أصغر من ٤ "
ج هو حدث " الحصول على عدد يحقق المتباينة ١ ≤ س ≤ ٦ "
ء هو حدث " الحصول على عدد فردى غير أولى "

الحل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

أ = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

ب = ∅ ، و واضح أنه حدث مستحيل

ج = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، و واضح أنه حدث مؤكد لأنه = ف

ء = { ١ } ، و واضح أنه حدث أولى

تدريب [١] سحبت بطاقة عشوائياً من ثمان بطاقات مرقمة من ١ إلى ٨
أكتب كلاً من الأحداث الآتية مبيناً أياً منها يكون حدثاً مؤكداً و أيها حدثاً مستحيلاً و أيها يكون حدثاً أولياً :

أ هو حدث " الحصول على عدد زوجى "
ب هو حدث " الحصول على عدد أكبر من ٨ "
ج هو حدث " الحصول على عدد يقبل القسمة على ٥ "
ء هو حدث " الحصول على عدد يحقق المتباينة ٠ < س < ٩ "

الأحداث المتنافية :

يقال لحدثين أ ، ب من فضاء عينة ف أنهما متنافيان إذا و فقط إذا كان :

أ ∩ ب = ∅

ملاحظات :

* يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا و فقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى
* إذا كان الحدثان : أ ، ب متنافيان فإن : أ ∩ ب = ∅
  و أيضاً إذا كان : أ ∩ ب = ∅ فإن : أ ، ب يكونان حدثين متنافيين
* إذا كانت : أ ، ب ، ج ثلاثة أحداث و كان : أ ∩ ب = ∅
  ، ب ∩ ج = ∅ ، أ ∩ ج = ∅ فإن :
  أ ، ب ، ج أحداث متنافية و العكس صحيح
* الأحداث الأولية (البسيطة) فى أى تجربة عشوائية تكون عادة متنافية
* أى حدث أ و مكملة أ′ هما حدثان متنافيان

مثال [٢] من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } كون عدد مكون من رقمين مختلفين
أكتب فضاء العينة لهذه التجربة ثم أوجد كل من الأحداث التالية :

أ هو حدث " مجموع الرقمين = ٧ "
ب هو حدث " مجموع الرقمين عدد زوجى "
ج هو حدث " العدد الماتج يقبل القسمة على ٣ "
ثم بين أى من الأحداث أ ، ب ، ج يتنافى مع الآخر
، هل الأحداث أ ، ب ، ج متنافية

الحل

ف = { ٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤ }

أ = { ٤٣ ، ٣٤ } ، ب = { ٣١ ، ١٣ ، ٤٢ ، ٢٤ }

، ج = { ٢١ ، ١٢ ، ٤٢ ، ٢٤ }

، ∵ أ ∩ ب = ∅ ∴ أ ، ب حدثان متنافيان

، ∵ أ ∩ ج = ∅ ∴ أ ، ج حدثان متنافيان

، ∵ ب ∩ ج = { ٤٢ ، ٢٤ } ∴ ب ∩ ج ≠ ∅

∴ ب ، ج حدثان غير متنافيين

، ∵ أ ∩ ب ∩ ج = ∅ ، هى غير متنافية مثنى مثنى

∴ أ ، ب ، ج غير متنافية

تدريب [٢] فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى

إذا كان : أ هو حدث " الحصول على عدد فردى "

ب هو حدث " الحصول على عدد زوجى "

ج هو حدث " الحصول على عدد أولى "

فأى من الأحداث أ ، ب ، ج يتنافى مع الآخر

، هل الأحداث أ ، ب ، ج متنافية

مسلمات الإحتمال :

نعلم أن إذا كان : ف هو فضاء عينة لتجربة عشوائية فإنه يمكن تعريف مجموعة من من الأحداث على هذا الفضاء ، و نستطيع أن نعبر عن مدى إمكانية وقوع أى حدث منها بصورة عددية بما يسمى إحتمال الحدث و هو يحقق المسلمات التالية :

(١) لكل حدث أ ⊂ ف يوجد عدد حقيقى يسمى إحتمال الحدث و يرمز له بالرمز :

" ل (أ) " حيث : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١ أى : ل (أ) ∈ [٠ ، ١]

(٢) ل (ف) = ١ أى أن : إحتمال الحدث المؤكد = ١

(٣) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافين من فضاء عينة فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

و يمكن تعميم هذه القاعدة لعدة أحداث متنافية مثنى مثنى :

$أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ... ، $أ_ن$ فيكون :

ل ($أ_١$ ∪ $أ_٢$ ∪ ... ∪ $أ_ن$) = ل ($أ_١$) + ل ($أ_٢$) + ... ل ($أ_ن$)

نتائج هامة :

(١) ل (∅) = صفر أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٢) ل ($أ'$) = ١ − ل (أ) حيث : $أ'$ هو الحدث المكمل للحدث أ بالنسبة لـ ف

(٣) ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)

حيث : أ ، ب أى حدثين من فضاء العينة ف (ليسا بالضرورة حدثين متنافيين)

، ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ل (أ ∩ $ب'$)

حساب الإحتمال :

هناك العديد من القوانين التى تستخدم لحساب الإحتمال ، و لكن أبسطها هو الذى تكون فيه جميع نواتج التجربة (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات أى لها نفس فرص الحدوث

فإذا كان : ف فضاء عينة محمود لتجربة عشوائية حيث :

ف = { $و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، ... ، $و_ن$ } و كان :

ل ({ $و_١$ }) = ل ({ $و_٢$ }) = ل ({ $و_٣$ }) = ... = ل ({ $و_ن$ })

، ∵ { $و_١$ } ، { $و_٢$ } ، { $و_٣$ } ، ... ، { $و_ن$ } أحداث أولية فهى أحداث متنافية

فإن : ف فى تلك الحالة تسمى بفضاء عينة ذى إحتمالات متساوية

و قد أصطلح على كتابة ل ($و_١$) لتعنى ل ({ $و_١$ }) و ذلك تيسيراً للكتابة

∵ ل ($و_١$) + ل ($و_٢$) + ل ($و_٣$) + ... + ل ($و_ن$) = ل (ف) = ١

∴ ل ($و_ر$) = $\frac{١}{ن}$ حيث : ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

و بصفة عامة :

إذا كان : ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات

فإن : إحتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف و يرمز له بالرمز ل (أ) يعطى بالعلاقة

ل (أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ف)}$ = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$

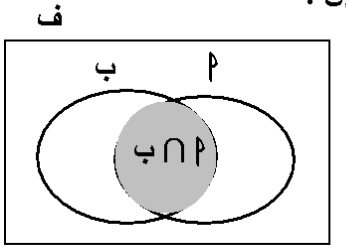
ملاحظات :

* فى أى تجربة عشوائية تعتمد على إختيار عنصر من مجموعة بها عدد محدود من العناصر فإن عملية الإختيار تتم بطريقة عشوائية أى أن : كل عنصر يكون له نفس الفرصة فى الإختيار

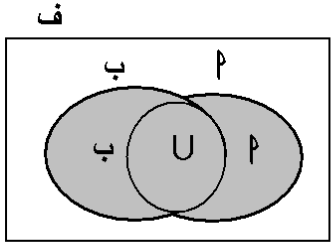
* فى أى تجربة عشوائية تعتمد على إلقاء قطعة حجر نرد أو إلقاء قطعة نقود سيفترض أن حجر النرد أو قطعة النقود منتظمة تماماً مالم يذكر خلاف ذلك

العمليات على الأحداث :

نعلم أن الأحداث هى مجموعات جزئية من فضاء العينة " ف " لذلك يمكن إجراء العمليات على المجموعات مثل الإتحاد و التقاطع و الفرق و الإكمال على الأحداث المختلفة للحصول على أحداث جديدة فإذا كان : أ ، ب حدثين من ف فإن :

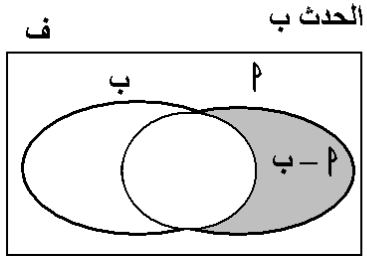


(١) أ ∩ ب يعنى حدث وقوع أ ، ب
أى وقوع الحدثين معاً
و الجزء المظلل يمثل الحدث أ ∩ ب

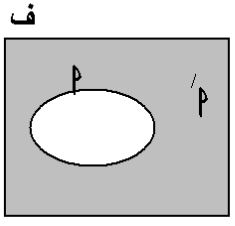


(٢) أ ∪ ب يعنى وقوع أ أو ب أو كلاهما
أى حدث وقوع أحدهما على الأقل
و الجزء المظلل يمثل الحدث أ ∪ ب

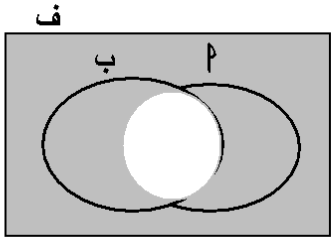
(٣) أ – ب يعنى حدث وقوع الحدث أ و عدم وقوع الحدث ب
أى وقوع الحدث أ فقط
و الجزء المظلل يمثل الحدث أ – ب



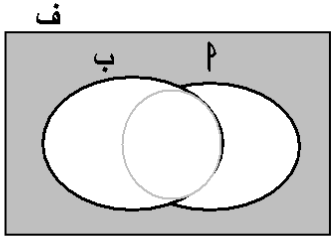
(٤) الحدث المكمل : مكملة المجموعة أ بالنسبة إلى ف
و هى المجموعة أ′ ، و يسمى أ′ بالحدث المكمل
أى حدث عدم وقوع الحدث أ
و الجزء المظلل يمثل الحدث أ′



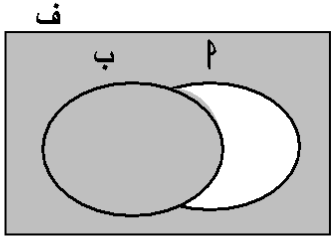
(٥) (أ ∩ ب)′ = (أ′ ∪ ب′)
يعنى حدث عدم وقوع الحدثين معاً
أى وقوع أحدهما على الأكثر
و الجزء المظلل يمثله



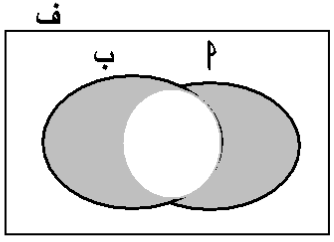
(٦) (أ ∪ ب)′ = (أ′ ∩ ب′)
يعنى حدث عدم وقوع أى من الحدثين
أى عدم وقوع أ و عدم وقوع ب
و الجزء المظلل يمثله



(٧) (ب ∪ أ′) = (أ – ب)′
يعنى حدث وقوع ب أو عدم وقوع أ
أى عدم وقوع أ فقط
و الجزء المظلل يمثله



(٨) (أ – ب) ∪ (ب – أ)
يعنى حدث وقوع أحد الحدثين دون الآخر
أى وقوع أحد الحدثين فقط
و الجزء المظلل يمثله



ملخص إحتمالات بعض الأحداث و التعبير اللفظى لها :

الصورة الرمزية	الصورة اللفظية
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أ أو ب أو كلاهما إحتمال وقوع أى من الحدثين إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)	إحتمال وقوع أ و ب إحتمال وقوعهما معا
ل (أَ) = ل (ف – أ) = ١ – ل (أ)	إحتمال الحدث المكمل للحدث أ إحتمال عدم وقوع أ
ل (أ – ب) = ل (أ ∩ بَ) = ل (أ) – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أ فقط إحتمال وقوع أ و عدم وقوع ب
ل (ب – أ) = ل (أَ ∩ ب) = ل (ب) – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع ب فقط إحتمال وقوع ب و عدم وقوع أ
ل (أَ ∪ بَ) = ل (ب – أ) = ١ – ل (ب – أ)	إحتمال عدم وقوع ب فقط إحتمال وقوع أ أو عدم وقوع ب
ل (أَ ∪ ب) = ل (أ – ب) = ١ – ل (أ – ب)	إحتمال عدم وقوع أ فقط إحتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ
ل (أَ ∪ بَ) = ل (أ ∩ ب) = ١ – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أحدهما على الأكثر إحتمال عدم وقوع أ و ب معا
ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب) = ١ – ل (أ ∪ ب)	إحتمال عدم وقوع أى من الحدثين إحتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب
ل [(أ – ب) ∪ (ب – أ)] = ل (أ) + ل (ب) – ٢ ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أحدهما فقط إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر

ملاحظات :

(١) إذا كان : أ ⊂ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ل (أ) ، ل (أ ∪ ب) = ل (ب)
، ل (أ – ب) = صفر ، ل (ب – أ) = ل (ب) – ل (أ)

(٢) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∩ ب) = صفر
، ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)
، ل (أ – ب) = ل (أ) ، ل (ب – أ) = ل (ب)

مثال [٣] ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين أوجد إحتمال إحتمال كل من الأحداث التالية : أ هو حدث ظهور صورة واحدة فقط
، ب هو حدث ظهور كتابة واحدة على الأكثر

الحل

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } ∴ ن (ف) = ٤

أ = { (ص ، ك) ، (ك ، ص) } ∴ ن (أ) = ٢ ∴ ل (أ) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

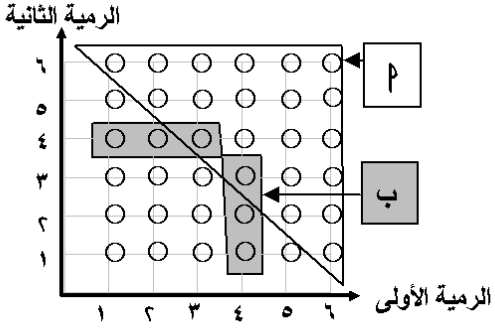
، ب = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) }

∴ ن (ب) = ٣ ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$

تدريب [٣] ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :
أ هو حدث ظهور صورة فى كل من الرمتين
، ب هو حدث ظهوركتابة واحدة على الأقل

مثال [٤] ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :
أ هو حدث أن يكون مجموع العددين أكبر من أو يساوى ٧
، ب هو حدث أن يكون أحد العددين ٤ والمجموع أقل من ٨

الحل



من الشكل المقابل :

ن (ف) = ٣٦ ،

ن (أ) = ٢١

∴ ل (أ) = $\frac{٢١}{٣٦}$ = $\frac{٧}{١٢}$

، ن (ب) = ٦ ∴ ل (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

تدريب [٤] ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :
أ هو حدث الحصول على عددين مختلفين
، ب هو حدث أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨

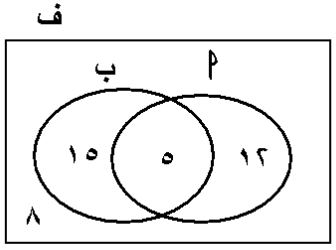
مثال [٥] فصل دراسى به ٤٠ طالبا نجح منهم ١٧ طالبا فى إمتحان الفلسفة ، ٢٠ طالبا فى إمتحان التاريخ ، ٥ طلاب منهم فى الامتحانين معا فإذا أختير طالب عشوائيا أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :

أ هو حدث أن يكون الطالب المختار ناجحا فى الفلسفة

ب هو حدث أن يكون الطالب المختار ناجحا فى التاريخ

ج هو حدث أن يكون الطالب المختار ناجحا فى أحد الامتحانين على الأقل

الحل



ن (ف) = ٤٠ ، ن (أ) = ١٧

∴ ل (أ) = $\frac{١٧}{٤٠}$

ن (ب) = ٢٠ ∴ ل (ب) = $\frac{٢٠}{٤٠}$ = $\frac{١}{٢}$

ن (ج) = ١٢ + ٥ + ١٥ = ٣٢

∴ ل (ج) = $\frac{٣٢}{٤٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

تدريب[٥] فصل دراسى به ٣٠ طالبا منهم ١٥ طالبا يمارسون النشاط الرياضى ، ١٢ طالبا يمارسون النشاط الفنى ، ٥ طلاب يمارسون النشاطين معا فإذا أختير طالب عشوائيا أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :

أ هو حدث أن يكون الطالب المختار النشاط الرياضى فقط

ب هو حدث أن يكون الطالب المختار لا يمارس اى نشاط

ج هو حدث أن يكون الطالب المختار يمارس أحد النشاطين على الأكثر

مثال [٦] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية و كان :

ل (أ) = ٠,٤٣ ، ل (ب′) = ٠,٦٨ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد :

ل (ب) ، ل (أ′ ∩ ب′) ، ل (ب – أ)

الحل

∵ ل (ب′) = ١ – ل (ب)

∴ ل (ب) = ١ – ل (ب′) = ١ – ٠,٦٨ = ٠,٣٢

= ١ – [ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)]

= ١ – [٠,٤٣ + ٠,٣٢ – ٠,٣] = ٠,٥٥

∵ ل (ب – أ) = ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

∴ ل (ب – أ) = ٠,٣٢ – ٠,٣ = ٠,٠٢

تدريب[٦] إذا كان أ ، ب حدثين فضاء عينة لتجربة عشوائية و كان :

ل (أ′) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٨ ، ل (أ – ب) = ٠,١ أوجد :

ل (أ ∪ ب) ، ل [(أ – ب) ∪ (ب – أ)]

مثال [٧] يصوب لاعبان أ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان إحتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف هو $\frac{٢}{٥}$ ، إحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو $\frac{١}{٤}$ ، إحتمال أن يصيب اللاعبان الهدف معا هو $\frac{١}{٦}$ أوجد :

أولاً : إحتمال إصابة الهدف ثانياً : إحتمال إصابة الهدف من اللاعب أ فقط

الحل

ل (أ) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

أولاً : إحتمال إصابة الهدف = ل (أ ∪ ب)

= ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ – $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٢٩}{٦٠}$

ثانياً : إحتمال إصابة الهدف من اللاعب أ فقط = ل (أ – ب)

= ل (أ) – ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٢}{٥}$ – $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٧}{٣٠}$

تدريب[٧] يصوب جنديان نحو هدف ما فإذا كان إحتمال أن يصيب الجندى الأول الهدف هو ٠,٨٣ ، إحتمال أن يصيب الجندى الثاني الهدف هو ٠,٧٤ ، إحتمال أن يصيب الجنديان الهدف معا هو ٠,٦٥ أوجد :

أولاً : إحتمال إصابة الهدف ثانياً : إحتمال عدم إصابة الهدف

تمارين (١)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن :
ل (أ ∩ ب) = ...

١) ١ ٢) −١ ٣) صفر ٤) ∅

[٢] إذا كان : إحتمال وقوع الحدث أ هو ٧٥ ٪ فإن : إحتمال وقوع الحدث أ′ = ...

١) ١ ٢) $\frac{٣}{٤}$ ٣) $\frac{١}{٢}$ ٤) $\frac{١}{٤}$

[٣] إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ فإن : ل (ب) = ...

١) ٠,٣ ٢) ٠,٤ ٣) ٠,٥ ٤) ٠,٦

[٤] إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
ب ⊂ أ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

١) صفر ٢) ل (ب) ٣) ل (أ) ٤) ل (أ ∩ ب)

[٥] إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن إحتمال ظهور عدد أقل من ٣ = ...

١) $\frac{١}{٦}$ ٢) $\frac{١}{٣}$ ٣) $\frac{١}{٢}$ ٤) $\frac{٢}{٣}$

[٦] إذا كان : أ ، ب من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
ل (أ) = ل(أ′) فإن : ل (أ) = ...

١) ٠,٣ ٢) ٠,٤ ٣) ٠,٥ ٤) ٠,٦

[٧] إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ فإن : ل (ب) = ...

١) $\frac{١}{٤}$ ٢) $\frac{١}{٣}$ ٣) $\frac{١}{٢}$ ٤) $\frac{١}{١٢}$

[٨] إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
أ ⊂ ب ، ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ فإن : ل (ب) = ...

١) $\frac{١}{٤}$ ٢) $\frac{١}{٣}$ ٣) $\frac{١}{٢}$ ٤) $\frac{١}{١٢}$

[٩] إذا سحبت بطاقة عشوائياً من بين ٢٠ بطاقة متماثلة و مرقمة من ١ إلى ٢٠
فإن إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدد مضاعف للعدد ٧ = ...

١) ١٠ ٪ ٢) ١٥ ٪ ٣) ٢٠ ٪ ٤) ٢٥ ٪

[١٠] إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن إحتمال ظهور صورة = ...

١) ١ ٢) $\frac{١}{٢}$ ٣) $\frac{١}{٤}$ ٤) $\frac{٣}{٤}$

(٢) ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :
أ هو حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين ، ب هو حدث ظهور صورة واحدة على الأقل

(٣) فى دراسة للأسر التى لديها ثلاثة أطفال أكتب فضاء العينة المرتبطة بالنوع ولد (و) أو بنت (ب) و الترتيب فى العمر بفرض عدم وجود توأم ثم أوجد إحتمالات الأحداث التالية
أ هو حدث أن يكون الطفل الأكبر بنتاً ، ب هو حدث أن يكون للأسرة ولدان متتاليان

(٥) إذا كان أحد الأندية يلعب ٣٠ مباراة فى الدورى وكان إحتمال تعادله فى عـدد من المباريات هو ٠,٣ وإحتمال فوزه فى عدد من المباريات هو ٠,٥ أوجد عدد المباريات التى يخسرها هذا النادى فى الدوري

(٦) صندوق يحتوى على ٤ كرات بيضاء و ٩ كرات سوداء و ٧ كرات حمراء أختيرت كرة عشوائيا منه أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :
أ هو حدث أن تكون الكرة المختارة بيضاء
ب هو حدث أن تكون الكرة المحتارة ليست حمراء
ج هو حدث أن تكون الكرة المختارة سوداء أو حمراء

(٧) كيس يحتوى على ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ ، ٦ كرات حمراء مرقمة من ٩ إلى ١٤ سحبت كرة عشوائيا منه أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :
أ هو حدث أن تكون الكرة المسحوبة تحمل عددا أوليا
ب هو حدث أن تكون الكرة المسحوبة تحمل عددا مربعا
ج هو حدث أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء وتحمل عددا فرديا
ء هو حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو تحمل عددا زوجيا

(٨) فى دراسة حول أحد بيوت الشباب وجد به ٢٨ شخصا من عدة دول منهم ٧ من السودان ، ١٢ من فرنسا ، ٤ من الهند ، ٥ من البرازيل اختير شخص منهم عشوائيا أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية : أ هو حدث أن يكون الشخص المختار من فرنسا
ب هو حدث أن يكون الشخص المختار من السودان أو الهند
ج هو حدث أن يكون الشخص المختار ليس من البرازيل
ء هو حدث أن يكون الشخص المختار من مصر

(٩) سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٣٠ اوجد إحتمال كل من الأحداث التالية : أ هو حدث أن تكون الكرة المسحوبة تحمل عدداً زوجياً ويقبل القسمة على ٥
ب هو حدث أن تكون الكرة المسحوبة تحمل عدداً يقبل القسمة على ٣ أو ٥

(١٠) من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } كون عدد من رقمين مختلفين و أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية : أ هو حدث أن يكون رقم العشرات فردى
ب هو حدث أن يكون رقم الآحاد أولى
ج هو حدث أن يكون رقم العشرات فردى أو رقم الآحاد أولى

(١١) ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة أوجد إحتمال الأحداث التالية : أ هو حدث الحصول على عددين متساويين
ب هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين عددا أوليا

(١٢) ألقى حجر نرد مرتين متتاليين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة فإذا كان أ هو حد الحصول على عدد أكبر فى الرمية الثانية منه فى الأولى ، ب هو حدث أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨ أوجد : ل(أ) ، ل(ب) ، ل (أ – ب)

(١٣) صمم حجر نرد بحيث يكون وجهان فيه يحملان العدد ٢ ، وجهان يحملان العدد ٤ ، وجهان يحملان العدد ٦ ألقى هذا الحجر مرتين متتاليتين فإذا كان أ هو حدث ظهور العدد ٢ في الرمية الأولى ، ب هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين هو ٢
أوجد : ل(أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب) ، ل(أ′ ∩ ب′)

(١٤) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل(ب′) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ أوجد :ل(ب) ، ل (أ′ ∩ ب′) ، ل (ب – أ)

(١٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد : ل(أ′ ∪ ب) ، ل (ب – أ)

(١٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل(أ) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(أ – ب) = $\frac{١}{٨}$ أوجد : ل(أ ∪ ب)′ ، ل(أ′ ∪ ب′)

(١٧) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
ل(أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل(أ – ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد : ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ′ ∪ ب′)

(١٨) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
٣ ل(أ) = ٤ ل(ب) ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ أوجد : ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ′)

(١٩) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : وكان ل(أ) = س ، ل(ب′) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل[ف – (أ ∪ ب)] = $\frac{٢}{٣}$ أوجد س
إذا كان : أولاً : أ ، ب متنافيان ثانياً : ب ⊂ أ

(٢٠) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية :
أولاً : وقوع حدث واحد على الأقل ثانياً : عدم وقوع الحدثين أ ، ب معا
ثالثاً : وقوع أحد الحدثين دون الآخر

(٢١) أشترك ثلاثة لاعبين أ ، ب ، ج فى إحدى السباقات فإذا كان إحتمال فوز أ = $\frac{١}{٣}$ إحتمال فوز ب ، إحتمال فوز أ = ٢ إحتمال فوز ج أوجد إحتمال فوز أ أو ج علما بأن واحد فقط هو الفائز

(٢٢) بلغ عدد زوار أحد المعارض في أحد الأيام ١٢٠ زائرا موزعين كما بالجدول فإذا أختير عشوائيا أحد الزوار أوجد إحتمال الأحداث التالية :
أ هو حدث أن يكون الشخص المختارمن الذكور
ب هو حدث أن يكون الشخص المختار من الأجانب
ج هو حدث أن يكون الشخص المختار من الذكور الأجانب
ء هو حدث أن يكون الشخص المختارمن الذكور أو من الأجانب

	عربى	أجنبى	مجموع
ذكر	٤٨	١٦	٦٤
أنثى	٣٢	٢٤	٥٦
مجموع	٨٠	٤٠	١٢٠

(٢٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد ١٠٠مرة سجلت الأعداد على الأوجهه الظاهرة وكانت النسبة كما يلى :

العدد على الوجه العلوى	١	٢	٣	٤	٥	٦
الإحتمال المقابل	٠,١٤	س	٠,١٧	٠,٣	٠,١٨	٠,١٦

أوجد س ثم أوجد إحتمال الأحداث التالية :
أ هو حدث ظهورعدد زوجى ، ب هو حدث ظهور عدد أولى
ج هو حدث ظهورعدد فردى ، ء هو حدث ظهور عدد زوجى أولى

المتغيرات العشوائية و التوزيعات الإحتمالية

المتغيرات العشوائية :

فى أى دراسة تطبيقية إحصائية نحصل على بيانات عددية عن المتغيرات التى ندرسها ، و فى معظم الأحيان لا يهتم نواتج التجربة العشوائية ذاتها بل يهتم بأعداد حقيقية مرتبطة بهذه النواتج ، و وفقنا للإهتمام يجزء فضاء العينة إلى أحداث متنافية (مجموعات جزئية غير متقاطعة) و كل حدث منها مرتبط بعد حقيقى

فمثلاً :

فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتالتين فإن :

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

فإذا كان الإهتمام مثلاً بعدد الصور التى تظهر فتعرف الدالة :

س : ف ← ح " حيث : ح مجموعة الأعداد الحقيقية " كما يلى :

س : (ص ، ص) ⟵ ٢ ، (ص ، ك) ⟵ ١

، (ك ، ص) ⟵ ١ ، (ك ، ك) ⟵ ٠

و منها نجد أن : س تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢

أى أن : مدى المتغير العشوائى س = { ٠ ، ١ ، ٢ }

و تستخدم الدالة س فى التعبير عن الأحداث المختلفة محل الإهتمام بدلالة قيم هذه الدالة و بالتالى فى المثال السابق يكون :

س = ٢ يعبر عن حدث ظهور صورتين ، س = ١ يعبر عن حدث ظهور صورة

، س = ٠ يعبر عن حدث عدم ظهور صورة

و يطلق على مثل هذه الدالة إسم المتغير العشوائى

تعريف المتغير العشوائى :

إذا كان : ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية

فـــإن : أى دالة س : ف ← ح تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف " فضاء عينة هذه التجربة "

ملاحظات :

* المتغير العشوائى يجزئ فضاء العينة لعدد من الأحداث المتنافية إتحادها يعطى فضاء العينة ، و كل قيمة من قيمه هى صورة لحدث واحد و واحد فقط من هذه الأحداث
* يمكن تعريف أكثر من من متغير عشوائى على نفس فضاء العينة كل منها يعتمد على إهتمام معين

المتغير العشوائى المتقطع " أو المنفصل أو الوثاب " :

هو متغير عشوائى مداه مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية

التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى المتقطع :

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة

{ $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، $س_ن$ } فإن الدالة د المعرفة كالآتى :

د : { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، $س_ن$ } ← ح

حيث : د ($س_ر$) = ل (س = $س_ر$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

تحدد ما يسمى بالتوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س و الذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د أى :

{ ($س_1$ ، د ($س_1$)) ، ($س_2$ ، د ($س_2$)) ، ... ، ($س_ن$ ، د ($س_ن$)) }

و يفضل أن توضع على صورة جدول كما يلى :

$س_ر$	$س_1$	$س_2$	$س_3$	...	$س_ن$
د ($س_ر$)	د ($س_1$)	د ($س_2$)	د ($س_3$)	...	د ($س_ن$)

ملاحظة :

الدالة د تحقق الشرطين :

١ – د ($س_ر$) ≥ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن

٢ – د ($س_1$) + د ($س_2$) + د ($س_3$) + ... + د ($س_ن$) = ١

و أى دالة تحقق هذين الشرطين تصلح أن تكون توزيعاً إحتمالياً لمتغير عشوائى متقطع س مداه هو { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، $س_ن$ }

و يفضل كتابة التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س بالصورة :

مثال [١] إلقيت قطعة نقود مرتين متتالتين إذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة أوجد مدى المتغير س ثم أكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير س

الحلـــــ

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } ، ن (ف) = ٤

∵ المتغير العشوائى س يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة

∴ مدى المتغير العشوائى س = { ٢ ، ١ ، ٠ }

، ∵ د (٢) = ل (س = ٢) = ل { (ص ، ص) } = $\frac{1}{4}$

، د (١) = ل (س = ١) = ل { (ص ، ك) ، (ك ، ص) } = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

، د (٠) = ل (س = ٠) = ل { (ك ، ك) } = $\frac{١}{٤}$

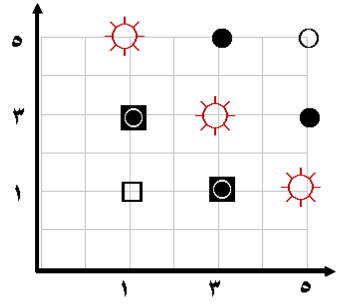
∴ التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	٢	١	٠
د (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

تدريب [١] إلقيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن (عدد الصور – عدد الكتابات) أوجد مدى المتغير س ثم أكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير س

مثال [٢] صمم حجر نرد بحيث يحمل وجهان منه الرقم ١ ، وجهان منه الرقم ٣ ، وجهان منه الرقم ٥ ألقى هذا الحجر مرتين متتاليتين وعرف المتغير العشوائى س بانه مجموع العددين الظاهرين اوجد التوقع أوجد مدى المتغير س ثم أكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير س

الحل



الشكل المقابل يوضح الأحداث المتنافية المرتبطة بالمتغير العشوائى س ، ن (ف) = ٩

مدى المتغير العشوائى

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

حيث : د (٢) = $\frac{١}{٩}$ ، د (٤) = $\frac{٢}{٩}$

، د (٦) = $\frac{٣}{٩}$ ، د (٨) = $\frac{٢}{٩}$ ، د (١٠) = $\frac{١}{٩}$

∴ التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	٢	٤	٦	٨	١٠
د (س)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

تدريب [٢] ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين و كان المتغير العشوائى س يعبر عن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين أوجد مدى المتغير س ثم أكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير س

المتوسط (التوقع) – التباين – الإنحراف المعيارى للمتغير العشوائى المتقطع

إذا كان س متغير عشوائى له توزيع إحتمالى فإن أى دراسة إحصائية لهذا التوزيع تعتمد على التعرف على مقياسين من المقاييس الإحصائية هما :

* النزعة المركزية : و هى القيمة التى تتمركز عندها قيم هذا المتغير العشوائى
* التشتت : و هو يبين إلى أى مدى تتشتت قيم المتغير العشوائى حول نزعته المركزية و المتوسط (التوقع) هو أحد مقاييس النزعة المركزية و هو يحدد القيمة التى تتمركزحولها معظم قيم المتغير العشوائى

، التباين هو أحد مقاييس التشتت و هو يحدد تشتت (إنتشار) قيم المتغير العشوائى عن المتوسط و كذلك الإنحراف المعيارى هو أيضاً أحد مقاييس التشتت

تعريف :

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة

{ $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ } بإحتمالات

د ($س_١$) ، د ($س_٢$) ، د ($س_٣$) ، ... ، د ($س_ن$) على الترتيب فإن :

المتوسط " التوقع " (μ) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س_ر$. د ($س_ر$)

أى أن : μ = $س_١$. د ($س_١$) + $س_٢$. د ($س_٢$) + $س_٣$. د ($س_٣$) + ... + $س_ن$ د ($س_ن$)

التباين : ($σ^٢$) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ ($س_ر$ – μ)^٢ . د ($س_ر$)

= $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س_ر^٢$. د ($س_ر$) – $μ^٢$

الإنحراف المعيارى : (σ) = $\sqrt{(σ^٢)}$

معامل الإختلاف : علمنا أن الإنحراف المعيارى هو أحد مقاييس التشتت كما أنه يقاس بنفس وحدات المتغير العشوائى موضوع البحث ، و هذا يجعله يصلح أيضاً في مقارنة مجموعتين في حالة ما إذا كان لهما نفس الوحدات و المتوسطات

أما إذا إختلفت الوحدات أو المتوسطات بين المجموعتين فإنه يتعذر إستخدام الإنحراف المعيارى للمقارنة بين تشتت المجموعتين لذلك نشأت الحاجة إلى إستخدام مقياس جديد للمقارنة يسمى معامل الإختلاف

تعريف :

$$\text{معامل الإختلاف} = \frac{\text{الإنحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠ \%$$

و تستخدم كلمة معامل للدلالة على أن المقياس الناتج لا يتأثر بوحدات القياس و لا يكون له تمييز و يحسب عادة بنسبة مئوية

مثال [٣] فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائى يعبر عن (عدد الصور) لتجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة
أحسب المتوسط و الإنحراف المعيارى لهذا التوزيع ثم أوجد معامل الإختلاف

الحل

∵ ف = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك)
، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }
، ن (ف) = ٨
، ∵ المتغير العشوائى س يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة
∴ مدى المتغير العشوائى س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }
∴ التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

و لحساب المتوسط و التباين نكون الجدول التالى :

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^٢ \cdot د(س_ر)$
٠	$\frac{١}{٨}$	٠	٠
١	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$
٢	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٦}{٨}$	$\frac{١٢}{٨}$
٣	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٩}{٨}$
		$\frac{١٢}{٨} = ١,٥$	$\frac{٢٤}{٨} = ٣$

من الجدول : المتوسط " التوقع " (μ) = ١,٥

، التباين = ٣ − (١,٥)^٢ = $\frac{٣}{٤}$ ، الإنحراف المعيارى = $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = ٠,٨٧

، معامل الإختلاف = $\frac{٠,٨٧}{٣} \times ١٠٠ \%$ = ٢٩ %

تدريب [٣] فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائى يعبر عن (عدد الصور × عدد الكتابات) لتجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة
أحسب المتوسط و الإنحراف المعيارى لهذا التوزيع ثم أوجد معامل الإختلاف

مثال [٤] إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة

د (س) = $\frac{٢ ك}{س + ١}$ حيث : س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد قيمة ك
ثم أحسب التباين

الحل

∵ د (٠) + د (١) + د (٢) + د (٣) = ١

∴ ٢ ك + $\frac{٢}{٣}$ ك + $\frac{١}{٢}$ ك = ١ و منها : ك = $\frac{٦}{٢٥}$ ويكون :

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^٢ \cdot د(س_ر)$
٠	$\frac{١٢}{٢٥}$	٠	٠
١	$\frac{٦}{٢٥}$	$\frac{٦}{٢٥}$	$\frac{٦}{٢٥}$
٢	$\frac{٤}{٢٥}$	$\frac{٨}{٢٥}$	$\frac{١٦}{٢٥}$
٣	$\frac{٣}{٢٥}$	$\frac{٩}{٢٥}$	$\frac{٢٧}{٢٥}$
		$\frac{٢٣}{٢٥}$	$\frac{٤٩}{٢٥}$

∴ المتوسط = μ = $\frac{٢٣}{٥}$ ، التباين = $\frac{٤٩}{٢٥}$ − ($\frac{٢٣}{٢٥}$)^٢ = $\frac{٦٩٦}{٦٢٥}$ = ١,١١٣٦

تدريب [٤] إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة

د (س) = $\frac{ك}{س + ٢}$ حيث : س = −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ أوجد قيمة ك
ثم أحسب التباين

تمارين (٢)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كان متوسط متغير عشوائى متقطع = ٤٤ ، وتباينه = ٢٥

فإن معامل الإختلاف له = ...

١) ٠,١١٤ ٢) ١١,٤ ٣) ١,١٤ ٤) ١١٤

[٢] إذا كان متوسط متغير عشوائى متقطع = ٢٥ ، ومعامل الإختلاف له = ٦٤

فإن تباين المتغير العشوائى = ...

١) ٤ ٢) ١٦ ٣) ٢٥٦ ٤) ٢

[٣] إذا كان الإنحراف المعيارى لمتغير عشوائى متقطع = ٦ ، ومعامل الإختلاف له = ٨ فإن متوسط المتغير العشوائى = ...

١) ٧٥ ٢) ٤٨ ٣) ١٤ ٤) ٢

(٢) صندوقان بكل منهما ٥ كرات مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائى س بأنه أصغر العددين المكتوبين على الكرتين المسحوبتين أوجد التباين

(٣) ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين فإذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين أوجد الإنحراف المعيارى

(٤) إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } بإحتمالات

ل (س = ٠) = ٠,١ ، ل (س = ١) = ٠,٢ ، ل (س = ٣) = ٠,٤

أوجد ل (س = ٢) ثم أوجد الإنحراف المعيارى

(٥) إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا مداه { −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } بإحتمالات

قدرها $\frac{١}{١٥}$ (ك − ١) ، $\frac{١}{١٥}$ ك ، $\frac{١}{١٥}$ (ك + ١) ، $\frac{١}{١٥}$ (ك + ٢)

، $\frac{١}{١٥}$ (ك − ٢) على الترتيب أوجد قيمة ك ثم أحسب الإنحراف المعيارى

(٦) س متغير عشوائى متقطع مداه { ١ ، ٢ } فإذا كان متوسطه $\mu = \frac{٥}{٤}$ فأوجد

ل (س = ١) ، ل (س = ٢) ثم أحسب معامل الإختلاف

(٧) س متغير عشوائي متقطع مداه { أ ، ب ، ٤ ، ٥ ، ٧ } حيث : أ < ب < ٤ ، وكان توزيعه الإحتمالي يعطى بالدالة د (س) = $\frac{١}{٣٠}$ ك لكل ك ∈ مدى س فإذا كان :

ل (ب < س < ٥) = ٠,٦ أوجد قيمة كلا من أ ، ب ثم أحسب التباين

(٨) إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه الإحتمالى مبين بالجدول التالى أوجد ك ثم أحسب الإنحراف المعيارى

س	١	٢	٤	٦
د (س)	٠,٢	٠,٣	ك	٠,١

(٩) إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه الإحتمالى مبين بالجدول التالى أوجد م ثم أحسب الإنحراف المعيارى

س	١	٢	٣	٤
د (س)	م	٢ م	٤ م	٣ م

(١٠) إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه الإحتمالى مبين بالجدول التالى أوجد أ ، ب إذا كان : μ = ٣ ثم إحسب الإنحراف المعيارى

س	١	٢	٤	أ
د (س)	٠,٢	ب	٠,٤	٠,١

(١١) إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه الإحتمالى مبين بالجدول التالى أوجد أ ، ب ، إذا كان : $\mu = \frac{٨}{٥}$ ثم أحسب الإنحراف المعيارى

س	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	أ	ب	$\frac{٦}{٢٥}$	$\frac{٤}{٢٥}$	$\frac{٢}{٢٥}$

(١٢) عند بحث العلاقة بين أعمار وأوزان مجموعة من لاعبى كرة القدم وجد أن متوسط أعمارهم ٢١,٦ بإنحراف معيارى ٢,٤ وأن متوسط أوزانهم ٧٢ وكان معامل الإختلاف لهذه الأوزان مساويا نصف معامل الإختلاف لأعمارهم فأوجد الإنحراف المعيارى لأوزان هذه المجموعة

المتغير العشوائى المتصل " المستمر "

المتغير العشوائى المتصل :

هو متغير عشوائى مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية و هى مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية

التوزيعات الإحتمالية المتصلة :

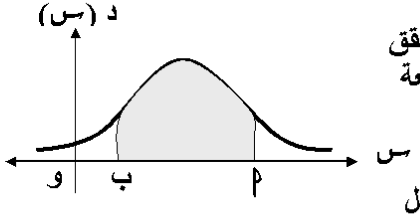
توزيعات الإحتمال للمتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة) يمكن أن تمتد إلى المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة) مع بعض الفروق التى تقضيها طبيعة كل من هذين النوعين من المتغيرات

فإذا كان : س متغيراً عشوائياً متصلاً مداه هو فترة مفتوحة أو مغلقة أى يأخذ عدداً لا نهائياً غير قابل للحصر من القيم في أى جزء من مداه مهما كان صغيراً

لذا فسوف يهتم في هذه الحالة بحساب إحتمال أن يقع المتغير العشوائى المتصل في فترة جزئية من مداه و لتكن الفترة [أ ، ب]

و الحصول على هذا الإحتمال يتطلب وجود دالة تحقق شروط معينة و بحيث تكون مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى هذه الدالة و فوق محور السينات في [أ ، ب] تساوى الإحتمال المطلوب

أى : ل (أ ≤ س ≤ ب) كما في الشكل المقابل



دالة كثافة الإحتمال :

إذا كان س متغير عشوائى متصل فإن الدالة الحقيقية د تسمى دالة كثافة المتغير العشوائى س إذا كان :

ل (أ ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى د و فوق محور السينات فى [أ ، ب] و ذلك لكل عددين حقيقين أ ، ب حيث : أ ≤ ب

و هذه الدالة تحقق لها الخواص التالية :

(١) منحنى الدالة يقع فوق محور السينات أى أن :

د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]

(٢) مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة د و فوق [أ ، ب] تساوى الواحد الصحيح

ملاحظات :

(١) أى دالة تحقق الشرطين السابقين تصلح أن تكون دالة كثافة إحتمال للمتغير العشوائى المتصل

(٢) إحتمال وقوع المتغير العشوائى المتصل فى [أ ، ب] لا يتغير إذا كانت الفترة مفتوحة أو مغلقة أو نصف مغلقة أى أن :

ل (أ ≤ س ≤ ب) = ل (أ < س ≤ ب) = ل (أ ≤ س < ب)

= ل (أ < س < ب)

(٣) د (س) لا تعبر عن إحتمال كما هو الحال فى المتغير العشوائى المتقطع ، و لذلك فإن التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى المتصل لا يعبر عنه كمجموعة من الأزواج المرتبة أو جدول و إنما يكتفى بتعريفه بدالة كثافة إحتمال

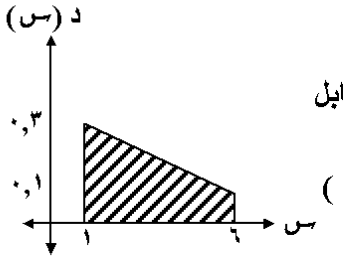
مثال [١] إذا كان س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الإحتمال له هى :

د (س) = { (١٧ − ٢ س) / ٥٠ ، ١ ≤ س ≤ ٦ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أثبت أن : ل (١ ≤ س ≤ ٦) = ١ ثم أوجد ل (س < ٤)

الحل

د (١) = ١٥/٥٠ = ٠,٣ ، د (٦) = ٥/٥٠ = ٠,١

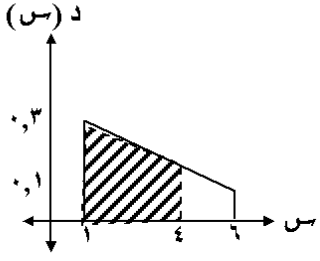


ل (١ ≤ س ≤ ٦) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل " مساحة سطح شبه منحرف "

= ½ × (٠,٣ + ٠,١) × (٦ − ١)

= ١

د (٤) = ٩/٥٠ = ٠,١٨



ل (س < ٤) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

= ½ × (٠,٣ + ٠,١٨) × (٤ − ١)

= ٠,٧٢

تدريب [١] إذا كان س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الإحتمال له هى :

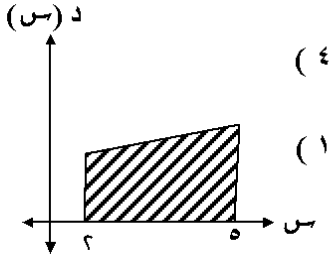
$$د(س) = \begin{cases} \frac{س + ١}{١٢} & ، ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

أثبت أن : ل (٠ ⩽ س ⩽ ٤) = ١ ثم أوجد ل (س < ٣)

مثال [٢] إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢٤}(ك س + ١) & ، ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

أوجد قيمة ك ثم أوجد ل (٣ ⩽ س ⩽ ٤)



الحل

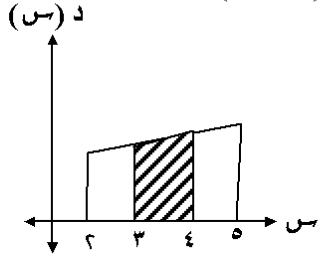
د (٢) = $\frac{١}{٢٤}$ (٢ ك + ١) ، د (٥) = $\frac{١}{٢٤}$ (٥ ك + ١)

، ∵ د (س) دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائى س

∴ ل (٢ ⩽ س ⩽ ٥) = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ × [$\frac{١}{٢٤}$ (٢ ك + ١) + $\frac{١}{٢٤}$ (٥ ك + ١)] × (٥ − ٢) = ١

و منها : ٧ ك + ٢ = ١٦ و بالتالى : ك = ٢



∴ د (٣) = $\frac{٧}{٢٤}$ ، د (٤) = $\frac{٩}{٢٤}$

∴ ل (٣ ⩽ س ⩽ ٤) = $\frac{١}{٢}$ × ($\frac{٧}{٢٤}$ + $\frac{٩}{٢٤}$) × ١

= $\frac{١}{٣}$

تدريب [٢] إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣٠}(١٥ - ك س) & ، ٢ \leqslant س \leqslant ٧ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

أوجد قيمة ك ثم أوجد ل (٢ ⩽ س ⩽ ٤)

تمارين (٣)

(١) إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢ س + ١}{١٨} & ، ١ \leqslant س \leqslant ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

* حقق أن ل (١ ≤ س ≤ ٤) = ١ ثم أوجد ل (س > ٣)

(٢) إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} ك س & ، ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

أوجد قيمة ك ثم أوجد ل (−٢ ⩽ س ≤ ٢)

(٣) إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س - ١ & ، ١ \leqslant س \leqslant ٢ \\ ١ & ، ٢ < س \leqslant ك \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

أوجد قيمة ك ثم أوجد ل (١,٥ ⩽ س ≤ ٤)

(٤) إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢٤}(٢ س + ٣) & ، ك \leqslant س \leqslant م \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

، كان : ل (س < ٣) = $\frac{٧}{١٢}$ فأوجد قيمة ك ، م

حيث : ك > ٠ ، م > ٠ ثم أوجد ل (س ≤ ٢)

(٥) إذا كان س متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{١٨}(س + ١) & ، -١ \leqslant س \leqslant ٥ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

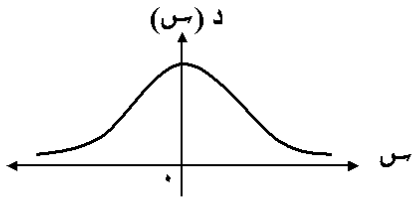
أوجد ل (س ≤ ٢) ، ل (س ⩽ ٢)

ثم أوجد قيمة ك التى تجعل (٠ ⩽ س ≤ ك) = $\frac{٢}{٣}$

التوزيع الطبيعى " الإعتدالى "

المتغير العشوائى الطبيعى :

هو متغير عشوائى متصل مداه] − ∞ ، ∞ [
و دالة الكثافة الإحتمالية له تمثل بمنحنى يتخذ دائماً
شكل الجرس ، ويطلق عليه أحياناً منحنى جاوس
و الصيغة الرياضية لدالة الكثافة تعتمد على قيمتين هما
μ " المتوسط " ، σ " الإنحراف المعيارى "
للمتغير العشوائى س و بهما يتحدد المنحنى الطبيعى
و يقال عن المتغير العشوائى س في هذه الحالة أن له توزيع طبيعى متوسطه μ
و إنحرافه المعيارى σ



خواص المنحنى الطبيعى :

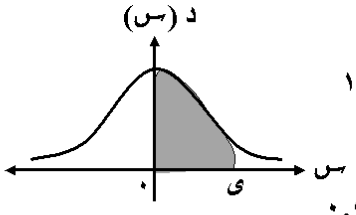
١ – المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات
٢ – له قمة واحدة و طرفاه يمتدان إلى ما لانهاية حيث يقتربان من المحور السينات و لكنهما لا يلتقيان به أبداً
٣ – له محور متماثل يمر بالقمة و يقطع محور السينات عند النقطة التى تحدد متوسطه أى أن محور التماثل هو المستقيم : س = μ و الذى يقسم المنطقة الواقعة أسفل المنحنى و فوق محور السينات إلى قسمين متساويين في المساحة
٤ – تقل التكرارات عند طرفى المنحنى و تزداد تدريجياً كلما أقتربنا من المنتصف حتى تبلغ أكبر ما يمكن عند متوسطه
٥ – يتزايد فى] − ∞ ، μ] ، و يتناقص فى [μ ، ∞ [
٦ – مساحة المنطقة تحت المنحنى و فوق [μ − σ ، μ + σ] تساوى ٦٨,٢٦ ٪ من مساحة المنطقة الكلية المحصورة تحت المنحنى بأكمله ،
مساحة المنطقة تحت المنحنى و فوق [μ − ٢ σ ، μ + ٢ σ] تساوى ٩٥,٤٤ ٪ من مساحة المنطقة الكلية المحصورة تحت المنحنى بأكمله ،
مساحة المنطقة تحت المنحنى و فوق [μ − ٣ σ ، μ + ٣ σ] تساوى ٩٩,٧٤ ٪ من مساحة المنطقة الكلية المحصورة تحت المنحنى بأكمله
٧ – مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى و فوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح كما هو الحال لمنحنى أى توزيع إحتمالى لمتغير متصل
و من التماثل نجد أن المستقيم س = μ يقسم تلك المنطقة إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥

المتغير الطبيعى المعيارى (القياسى) :

هو متغير طبيعى متوسطه μ = صفر ، و إنحرافه المعيارى σ = ١

خواص المنحنى الطبيعى المعيارى :

١ – المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات
٢ – المساحة فوق محور السينات و تحت المنحنى = ١
٣ – متماثل بالنسبة للمستقيم : س = صفر
الذى يقسم المنطقة تحت المنحنى و فوق محور السينات منطقتين متماثلتين و مساحة كل منهما = ٠,٥

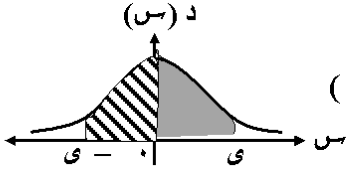


حساب الإحتمالات للمتغير الطبيعى المعيارى :

مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى و فوق الفترة [٠ ، ى] تمثل عددياً إحتمال وقوع المتغير العشوائى ص فى [٠ ، ى] أى أن :
ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى و فوق [٠ ، ى]
و يستخدم جدول " مبين فى نهاية الكتاب "يعطى مساحة تقريبية تحت منحنى دالة الكثافة للمتغير الطبيعى المعيارى ص و فوق الفترة [٠ ، ى]
حيث ى عدد حقيقى موجب يأخذ قيماً تبدأ من الصفر و تنتهى بالعدد ٣,٥٩

ملاحظات :

* ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ل (− ى ≤ ص ≤ ٠)
و ذلك لتساوى مساحتى المنطقتين المتناظرتين كما بالشكل المقابل



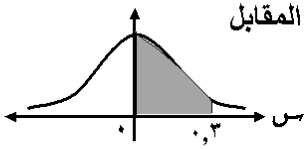
* يفضل رسم المنحنى الطبيعى المعيارى و تحديد المساحة التى تمثل الإحتمال المطلوب

مثال [١] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً فأوجد :

(١) ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣)
(٢) ل (− ٠,٦٧ ≤ ص ≤ ٠)
(٣) ل (ص ≤ ٢,٢٥)
(٤) ل (ص ≤ ٣,١٦)
(٥) ل (ص ≤ − ٠,٨٦)
(٦) ل (ص ≤ − ١,٧٥)
(٧) ل (٠,٣ ≤ ص ≤ ١,٨١)
(٨) ل (− ٠,١٤ ≤ ص ≤ ٢,٢٢)
(٩) ل (− ١,٦ ≤ ص ≤ − ٠,٨)
(١٠) ل (− ١,٣٧ ≤ ص ≤ ١,٣٧)

الحل

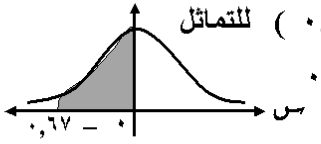
(١) ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



و نحصل على هذه المساحة بالبحث في الجدول عن القيمة التى تناظر (٠,٣) فى العمود الأول و أسفل (٠,٠٠)

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣) = ٠,١١٧٩

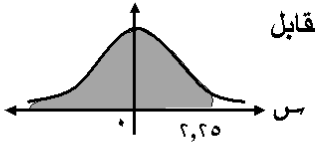
(٢) ل (−٠,٦٧ ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٦٧) للتماثل



= مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل = ٠,٢٤٨٦

و نحصل على هذه المساحة بالبحث في الجدول عن القيمة التى تناظر (٠,٦) فى العمود الأول و أسفل (٠,٠٧)

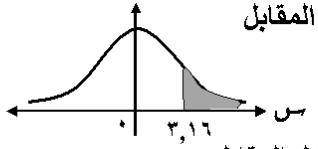
(٣) ل (ص ≤ ٢,٢٥) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٥)

= ٠,٥ + ٠,٤٨٧٨ = ٠,٩٨٧٨

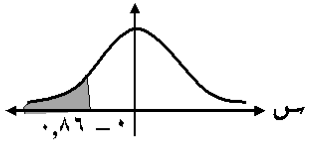
(٤) ل (ص ≥ ٣,١٦) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ٣,١٦)

= ٠,٥ − ٠,٤٩٩٧ = ٠,٠٠٠٣

(٥) ل (ص ≤ −٠,٨٦) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

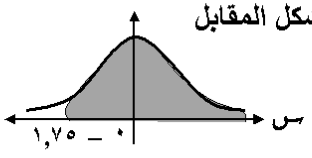


= ل (ص ≥ ٠,٨٦) نظراً للتماثل

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٨٦)

= ٠,٥ − ٠,٣٠٥١ = ٠,١٩٤٩

(٦) ل (ص ≥ −١,٧٥) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

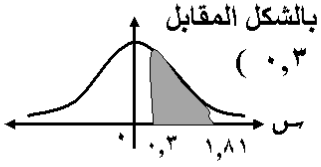


= ل (ص ≤ ١,٧٥) نظراً للتماثل

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٧٥)

= ٠,٥ + ٠,٤٥٩٩ = ٠,٩٥٩٩

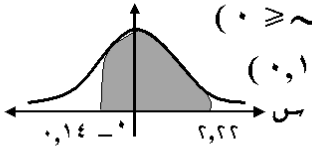
(٧) ل (٠,٣ ≤ ص ≤ ١,٨١) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٨١) − ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣)

= ٠,٤٦٤٩ − ٠,١١٧٩ = ٠,٣٤٧٠

(٨) ل (−٠,١٤ ≤ ص ≤ ٢,٢٢) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

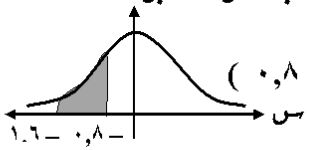


= ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٢) + ل (−٠,١٤ ≤ ص ≤ ٠)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٢) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,١٤)

= ٠,٤٨٦٨ + ٠,٠٥٥٧ = ٠,٥٤٢٥

(٩) ل (−١,٦ ≤ ص ≤ −٠,٨) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

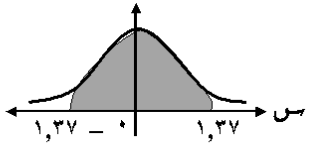


= ل (٠,٨ ≤ ص ≤ ١,٦) للتماثل

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦) − ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٨)

= ٠,٤٤٥٢ − ٠,٢٨٨١ = ٠,١٥٧١

(١٠) ل (−١,٣٧ ≤ ص ≤ ١,٣٧) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



= ٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٦٧) للتماثل

= ٢ × ٠,٤١٤٧ = ٠,٨٢٩٤

تدريب [١] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً فأوجد :

(١) ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥١)
(٢) ل (−٠,٩٤ ≤ ص ≤ ٠)
(٣) ل (ص ≤ ٢,٣٧)
(٤) ل (ص ≥ ٣,٠٤)
(٥) ل (ص ≤ −٠,٨٦)
(٦) ل (ص ≥ −٠,٤٨)
(٧) ل (٠,٨٦ ≤ ص ≤ ١,٤٣)
(٨) ل (−١,١٣ ≤ ص ≤ ٠,٦٤)
(٩) ل (−١,٩٣ ≤ ص ≤ −٠,٥٤)
(١٠) ل (−٢,٣٦ ≤ ص ≤ ٢,٣٦)

مثال [٢] إذا كان ص متغيراً عشوائياً معيارياً فأوجد قيمة العدد الحقيقى الموجب ك

الذى يحقق : (١) ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٣٤٣٨

(٢) ل (ص ≤ ك) = ٠,٩٢٦٥

(٣) ل (ص ≥ ك) = ٠,٤٠١٣

(٤) ل (ص ≤ − ك) = ٠,٣١٥٦

(٥) ل (ص ≥ − ك) = ٠,٩٧٥٠

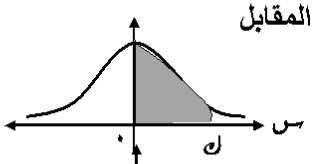
(٦) ل (٠,٥٣ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٠١٧١

(٧) ل (− ك ≤ ص ≤ ١,٦٢) = ٠,٥٥٠٠

(٨) ل (− ك ≤ ص ≤ ك) = ٠,٨٧٠٠

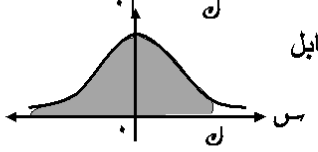
الحل

(١) ∵ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



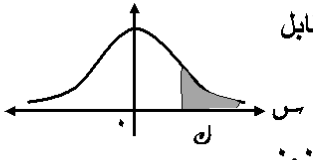
∴ بالبحث في الجدول عن (٠,٣٤٣٨) نجد أنها تناظر
(١,٠) فى العمود الأول و أسفل (٠,٠١)
∴ ك = ١,٠١

(٢) ∵ ل (ص ≤ ك) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



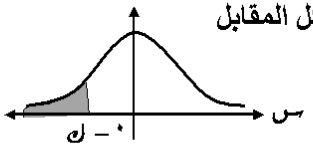
= ل (ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ٠,٩٢٦٥ = ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٩٢٦٥ − ٠,٥ = ٠,٤٢٦٥
و من الجدول نجد أن : ك = ١,٤٥

(٣) ∵ ل (ص ≥ ك) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



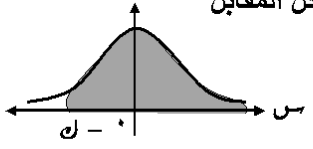
= ل (ص ≤ ٠) − ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ٠,٤٠١٣ = ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥ − ٠,٤٠١٣ = ٠,٠٩٨٧
و من الجدول نجد أن : ك = ٠,٢٥

(٤) ∵ ل (ص ≤ − ك) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



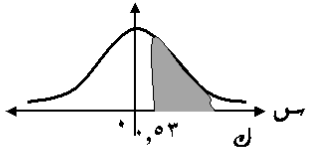
= ل (ص ≥ ك)
= ل (ص ≤ ٠) − ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ٠,٣١٥٦ = ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥ − ٠,٣١٥٦ = ٠,١٨٤٤
و من الجدول نجد أن : ك = ٠,٤٨

(٥) ∵ ل (ص ≥ − ك) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



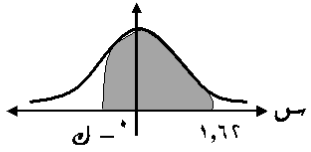
= ل (ص ≤ ك)
= ل (ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ٠,٩٧٥٠ = ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٩٧٥٠ − ٠,٥ = ٠,٤٧٥٠
و من الجدول نجد أن : ك = ١,٩٦

(٦) ∵ ل (٠,٥٣ ≤ ص ≤ ك) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



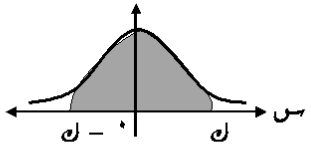
= ل (٠ ≤ ص ≤ ك) − ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٥٣)
∴ ٠,٠١٧١ = ل (٠ ≤ ص ≤ ك) − ٠,٢٠١٩
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٠١٧١ + ٠,٢٠١٩
= ٠,٢١٩٠
و من الجدول نجد أن : ك = ٠,٥٨

(٧) ∵ ل (− ك ≤ ص ≤ ١,٦٢) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



= ل (٠ ≤ ص ≤ ك) + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٢)
∴ ٠,٥٥٠٠ = ل (٠ ≤ ص ≤ ك) + ٠,٤٤٧٤
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٥٠٠ − ٠,٤٤٧٤
= ٠,١٠٢٦
و من الجدول نجد أن : ك = ٠,٢٦

(٨) ∵ ل (− ك ≤ ص ≤ ك) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



= ٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ٠,٨٧٠٠ = ٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ك)
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٤٣٥٠
و من الجدول نجد أن : ك = ١,٥١

تدريب [٢] إذا كان ص متغيراً عشوائياً معيارياً فأوجد قيمة العدد الحقيقى الموجب ك

الذى يحقق : (١) ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٤٤٨٤
(٢) ل (ص ≤ ك) = ٠,٦٤٨٠
(٣) ل (ص ≥ ك) = ٠,٠٠٩١
(٤) ل (ص ≤ − ك) = ٠,٢٦٤٣
(٥) ل (ص ≥ − ك) = ٠,٧٠٠٥
(٦) ل (٠,٨٦ ≤ ص ≤ ك) = ٠,١١٧١
(٧) ل (− ك ≤ ص ≤ ٠,٦٤) = ٠,٦٠٩٧
(٨) ل (− ك ≤ ص ≤ ك) = ٠,٤١٧٦

تمارين (٤)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً فإن : ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٣٥) = ...

١) ٠,٤٠٩٩ ٢) ٠,٣٩٤٤ ٣) ٠,٤١٣١ ٤) ٠,٤١١٥

[٢] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً فإن : ل (−١,٧ ≤ ص ≤ ٠) = ...

١) ٠,٤٥٥٤ ٢) ٠,٤٦٤١ ٣) ٠,٤٥٦٤ ٤) ٠,٤٦٤٩

[٣] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً فإن : ل (ص ≤ ٢,٣) = ...

١) ٠,٩٨٩٣ ٢) ٠,٠١٠٧ ٣) ٠,٩٨٩٦ ٤) ٠,٠١٠٤

[٤] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً فإن : ل (ص ≥ ١,٤٣) = ...

١) ٠,٩٢٣٦ ٢) ٠,٠٧٦٤ ٣) ٠,٤٢٣٦ ٤) ٠,٤١٩٢

[٥] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً و كان : ل (٠ ⩽ ص ⩽ ك) = ٠,٣٨٨٨ فإن : قيمة ك الموجبة = ...

١) ٢,١ ٢) ١,٢ ٣) ١,٢٢ ٤) ٢,١١

[٦] إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً و كان : ل (ص ≤ ك) = ٠,٤٠١٣ فإن : قيمة ك الموجبة = ...

١) ٠,٢٥ ٢) ١,٢٥ ٣) ٢,٢٥ ٤) ٠,٢

(٢) إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعياً معيارياً فأوجد :

[١] ل (ص ≤ ١,٣٩)
[٢] ل (ص ≥ ٢)
[٣] ل (ص ≥ −١,٤١)
[٤] ل (ص ≤ −٠,٣٥)
[٥] ل (١,١ ≤ ص ≤ ٣,٤٥)
[٦] ل (−٣,٣٣ ≤ ص ≤ −١,٤٣)
[٧] ل (−١,٣٥ ≤ ص ≤ ٠,١٥)
[٨] ل (−١,١٥ ≤ ص ≤ ١,١٥)

(٣) إذا كان ص متغيراً عشوائياً معيارياً فأوجد قيمة العدد الحقيقى الموجب ك الذى يحقق :

[١] ل (ص ≤ ك) = ٠,٠٢٨٧
[٢] ل (ص ≤ ك) = ٠,٩٣٣٢
[٣] ل (ص ≥ ك) = ٠,٦٨٧٩
[٤] ل (ص ≤ ك) = ٠,٠٧٩٣
[٥] ل (−١,٤ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٧٢٧٠
[٦] ل (ك ≤ ص ≤ ١,٤٦) = ٠,٢٤٠٠
[٧] ل (−ك ≤ ص ≤ ٠,٦٤) = ٠,٧٢٩٠
[٨] ل (−١,١٦ ≤ ص ≤ −ك) = ٠,١٥٨٠
[٩] ل (−ك ⩽ ص ⩽ ك) = ٠,٦٦٨٠

حساب الإحتمالات للمتغير الطبيعى غير المعيارى

قاعدة التحويل إلى متغير طبيعى معيارى :

إذا كان : س متغيراً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2 فإنه : لحساب إحتمالات وقوع المتغير العشوائى الطبيعى س فى أى [أ ، ب] يحول أولاً إلى متغير طبيعى معيارى لكى تستخدم الجداول الخاصة بذلك التوزيع فى الحساب

و يتحول المتغير الطبيعى س إلى متغير طبيعى معيارى ص بإستخدام القاعدة :

$$ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

و يكون : $ل(أ \leqslant س \leqslant ب) = ل\left(\frac{أ - \mu}{\sigma} \leqslant ص \leqslant \frac{ب - \mu}{\sigma}\right)$

مثال [١] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه $\mu = ١٨$ ، و إنحرافه المعيارى $\sigma = ٤$

أوجد : (١) ل (س ⩽ ١٧) (٢) ل (س ⩾ ٢٠)

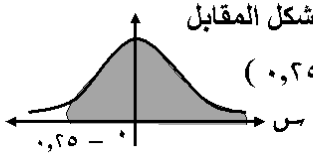
(٣) ل (١٠ ⩽ س ⩽ ١٤)

الحل

نحول س إلى متغير طبيعى معيارى كما يلى : $ص = \frac{س - ١٨}{٤}$

(١) $ل(س \leqslant ١٧) = ل\left(ص \leqslant \frac{١٧ - ١٨}{٤}\right)$

= ل (ص ⩽ −٠,٢٥) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

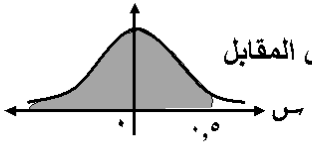


= ل (ص ⩾ ٠,٢٥) = ٠,٥ + ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٢٥)

= ٠,٥ + ٠,٠٩٨٧ = ٠,٥٩٨٧

(٢) $ل(س \geqslant ٢٠) = ل\left(ص \geqslant \frac{٢٠ - ١٨}{٤}\right)$

= ل (ص ⩾ ٠,٥) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

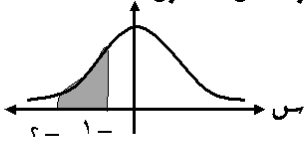


= ٠,٥ + ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٥)

= ٠,٥ + ٠,١٩١٥ = ٠,٦٩١٥

(١) $ل(١٠ \leqslant س \leqslant ١٤) = ل\left(\frac{١٠ - ١٨}{٤} \leqslant ص \leqslant \frac{١٤ - ١٨}{٤}\right)$

= ل (−٢ ⩽ ص ⩽ −١) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل



= ل (١ ⩽ ص ⩽ ٢) نظراً للتماثل

= ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٢) − ل (٠ ⩽ ص ⩽ ١)

= ٠,٤٧٧٢ − ٠,٣٤١٣ = ٠,١٣٥٩

تدريب [١] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه $\mu = ١٧$ ، إنحرافه المعيارى $\sigma = ٢$

أوجد : (١) ل (س ⩽ ١٩) (٢) ل (س ⩾ ١٨)

(٣) ل (١٥ ⩽ س ⩽ ٢٠)

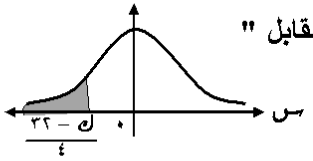
مثال [٢] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه $\mu = ٣٢$ ، و تباينه $\sigma^2 = ١٦$

أوجد قيمة ك إذا كان : (١) ل (س ⩽ ك) = ٠,٠٤٠١

(٢) ل (ك ⩽ س ⩽ ٣٥) = ٠,٦١٤٧

الحل

(١) ∵ ل (س ⩽ ك) = ٠,٠٤٠١ " كما بالشكل المقابل "



∴ $ل\left(ص \leqslant \frac{ك - ٣٢}{٤}\right) = ٠,٠٤٠١$

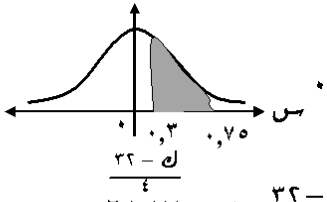
∴ $ل\left(ص \leqslant \frac{٣٢ - ك}{٤}\right) = ٠,٠٤٠١$

∴ $٠,٥ - ل\left(٠ \leqslant ص \leqslant \frac{٣٢ - ك}{٤}\right) = ٠,٠٤٠١$

∴ $ل\left(٠ \leqslant ص \leqslant \frac{٣٢ - ك}{٤}\right) = ٠,٥ - ٠,٠٤٠١ = ٠,٤٥٩٩$

و من الجدول : $\frac{٣٢ - ك}{٤} = ١,٧٥$ و منها : ك = ٢٥

(٢) ∵ ل (ك ⩽ س ⩽ ٣٥) = ٠,٦١٤٧



∴ $ل\left(\frac{ك - ٣٢}{٤} \leqslant ص \leqslant \frac{٣٥ - ٣٢}{٤}\right) = ٠,٦١٤٧$

∴ $ل\left(\frac{ك - ٣٢}{٤} \leqslant ص \leqslant ٠,٧٥\right) = ٠,٦١٤٧$

∴ $ل(٠ \leqslant ص \leqslant ٠,٧٥) + ل\left(٠ \leqslant ص \leqslant \frac{ك - ٣٢}{٤}\right) = ٠,٦١٤٧$

∴ $٠,٢٧٣٤ + ل\left(٠ \leqslant ص \leqslant \frac{ك - ٣٢}{٤}\right) = ٠,٦١٤٧$

∴ $ل\left(٠ \leqslant ص \leqslant \frac{ك - ٣٢}{٤}\right) = ٠,٦١٤٧ - ٠,٢٧٣٤ = ٠,٣٤١٣$

و من الجدول : $\frac{ك - ٣٢}{٤} = ١$ و منها : ك = ٢٨

تدريب [٢] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ٢٤ ، و تباينه σ^2 = ٢٥

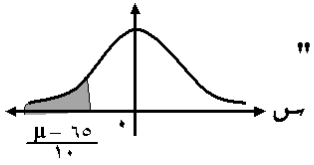
أوجد قيمة ك إذا كان : (١) ل (س ≥ ك) = ٠,٠٤٤٦

(٢) ل (ك ≤ س ≤ ٢٩) = ٠,٨١٨٥

مثال [٣] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ ، إنحرافه المعيارى σ = ٨

أوجد قيمة μ التى تحقق : ل (س ≥ ٤٠) = ٠,١٥٨٧

الحل



∵ ل (س ≥ ٦٥) = ٠,١٥٨٧ " كما بالشكل المقابل "

∴ ل (ص ≥ $\frac{٦٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,١٥٨٧

∴ ل (ص ≤ $\frac{٦٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,١٥٨٧

∴ ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ $\frac{٦٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,١٥٨٧

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ $\frac{٦٥ - \mu}{١٠}$) = ٠,٥ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٤٣١٣

و من الجدول : $\frac{٦٥ - \mu}{١٠}$ = ١ و منها : ك = ٧٥

تدريب [٣] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ ، إنحرافه المعيارى σ = ١٠

أوجد قيمة μ التى تحقق : ل (س ≥ ٦٥) = ٠,١٥٨٧

مثال [٤] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ ، إنحرافه المعيارى σ

أوجد : ل ($\mu - \sigma$ ≤ س ≤ $\mu + \sigma$)

الحل

ل ($\mu - \sigma$ ≤ س ≤ $\mu + \sigma$) = ل ($\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}$ ≤ ص ≤ $\frac{\mu - \sigma + \mu}{\sigma}$)

= ل (−١ ≤ ص ≤ ١) = ٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ١) = ٢ × ٠,٣٤١٣ = ٠,٦٨٢٦

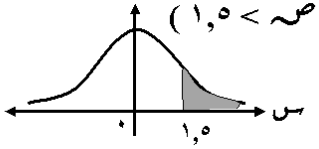
تدريب [٤] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ ، إنحرافه المعيارى σ

أوجد : ل ($\mu - ٣\sigma$ ≤ س ≤ $\mu + ٣\sigma$)

مثال [٥] إذا كانت أجور ٣٠٠٠ عامل تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ = ٧٥ جنيهاً ،
و إنحراف معيارى σ = ١٠ جنيهاً أوجد :
أولاً : النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهاً
ثانياً : عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً

الحل

نفرض أن س متغيرعشوائى طبيعى يمثل أجور العمال

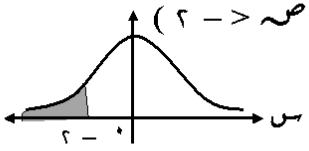


أولاً : ل (س > ٩٠) = ل (ص > $\frac{٩٠ - ٧٥}{١٠}$) = ل (ص > ١,٥)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ − ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

∴ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهاً = ٦,٦٨ ٪



ثانياً : ل (س < ٥٥) = ل (ص < $\frac{٥٥ - ٧٥}{١٠}$) = ل (ص < −٢)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ −٢)

= ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

∴ عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً = ٣٠٠٠ × ٠,٠٢٢٨ = ٦٨ عاملاً

تدريب [٥] إذا كانت درجات ٤٠٠٠ متعلم في إختبار مادة الإحصاء بالصف الثالث الثانوى
بمحافظة أسوان تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ = ٤٠ درجة ،
و إنحراف معيارى σ = ١٠ درجة أوجد :
أولاً : النسبة المئوية لعدد المتعلمين الذين تزيد درجاتهم عن ٣٠ درجة
ثانياً : عدد المتعلمين الذين تقل درجاتهم عن ٥٥ درجة

تمارين (٥)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٠٠ ، و تباينه σ^2 = ٤
و كان ل (س ≤ ك) = ٠,٠٣١٤ فإن : ك = ...
١) ١,٨٦ ٢) ١٠٠,٨٦ ٣) ٠,٠٣١٤ ٤) ١٠٠,٤٤

[٢] إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٠٠ ، و تباينه σ^2 = ٤
و كان ل (س ≥ ك) = ٠,٥٦٣٦ فإن : ك = ...
١) ٠,٥٦٣٦ ٢) ٩٩,٣٦ ٣) ٩٩,١٦ ٤) ٠,١٦

[٣] إذا كانت أطوال طلاب أحد المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ١٦٥ سم و إنحرافه المعيارى ٥ سم فإن : النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين تنحصر أطوالهم بين ١٦٠ سم ، ١٧٠ سم = ... ٪
١) ٣٤,١٣ ٢) ٣٤,١٣ ٣) ٦٨,٢٦ ٤) ٢٦,٦٨

[٤] إذا كانت أجور مجموعة مكونة من ٢٠٠ عامل تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ٤٨٠ جنيهاً و إنحرافه المعيارى ٦٠ جنيهاً فإن : عدد العمال الذين يزيد دخلهم عن ٦٠٠ جنيهاً = ... عامل
١) ٥ ٢) ٤ ٣) ٥٠ ٤) ٤٠

(٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه ٢٥ ، إنحرافه المعيارى ٢,٥ فأوجد :
(أ) ل (س ≥ ٣٠) ، (ب) ل (٢٠ ≤ س ≤ ٣٠)

(٣) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه ٨ ، تباينه ٤ و كان :
ل(س ≤ ك) = ٠,١٠٥٦
فأوجد : (أ) قيمة ك ، (ب) ل (س ≥ ١٠)

(٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ ، و إنحرافه المعيارى ٢ فأوجد قيمة μ التى تحقق : ل (س ≥ ١٠) = ٠,٨٤١٣

(٥) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه ٥٥ ، إنحرافه المعيارى σ فأوجد تباينه الذى يحقق ل (س ≥ ٤٥) = ٠,٠٢٢٨

(٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ وإنحرافه المعيارى σ فأوجد :
(أ) ل (س > μ) ، (ب) ل (μ + σ ≤ س ≤ μ + ٣ σ)

(٧) تقدم ١٠٠٠ شاب إلى إدارة التجنيد ، فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ١٧٠ سم و إنحراف معيارى ١٠ سم ، أوجد عدد الشباب :
(أ) الذين تقل أطوالهم عن ١٩٠ سم
(ب) غير المقبولين إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٥ سم

(٨) وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط ٥٠ سم و إنحراف معيارى σ ، إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦ ٪ من هذا النبات أقا من ٤٥ سم فأوجد التباين لأطوال هذا النبات

(٩) إذا كانت درجات الطلاب في احد الإمتحانات تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٧٥ درجة و إنحراف معيارى ١٥ درجة ، فإذا كان ١٥ ٪ من الطلاب الأوائل بالترتيب يحصلون على تقدير ممتاز فأوجد أقل درجة لكى يحصل الطالب على تقدير ممتاز

(١٠) إذا كان الدخل الشهرى لـ ٣٠٠ أسرة يمثل متغيراً عشوائياً س يتبع التوزيع الطبيعى بتوقع ٥٠٠ جنيهاً و إنحراف معيارى ٢٠ جنيهاً فأوجد عدد الأسر التى تحصل على دخل أكبر من ٥٣ جنيهاً ثم أوجد الحد الأعلى للدخل لنسبة ٤ ٪ من الأسر التى تحصل على أدنى الدخول

(١١) مسافر لديه ٤٢ دقيقة للحاق بالطائرة وكان عليه أن يستقل إما التاكسى أو الأوتوبيس لتوصيله للمطار فإذا كان التاكسى يستغرق فى المتوسط ٣٠ دقيقة بإنحراف معيارى ١٠ دقائق وكان الأوتوبيس يستغرق فى المتوسط ٣٥ دقيقة بإنحراف معيارى ٥ دقائق فأى الوسيلتين يستخدم

(١٢) بفرض أن أنصاف الأقطار للحلزونات التي تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعاً طبيعياً توقعه ٢٥ سم وإنحرافه المعيارى ٢٠ سم ويعتبر الحلزون معيبا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ سم أو يكبر عن ٢٨ سم أوجد إحتمال أن يكون الحلزون معيباً

(١٣) إذا كانت أطوال مجموعة من الطلبة تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ١٧٢ سم و إنحرافه المعيارى ١٠ سم ، و كان ٥٠ طالباً يقل طول كل منهم عن ١٧٠ سم فأوجد العدد الكلى لهؤلاء الطلبة

الإرتبـــــــاط

الإرتباط :

هو علاقة بين متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر

و سندرس هنا الإرتباط بين متغيرين (ظاهرتين) فقط

درجات الإرتباط :

(١) **الإرتباط التام** : فيه يمكن معرفة قيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر

مثل : الإرتباط بين محيط المربع و طول ضلعه

(٢) **الإرتباط الصفرى (المنعدم)** : و الذى يعنى أنه إذا عرفت قيمة أحد المتغيريين لا يمكن معرفة قيمة المتغير الآخر

مثل : العلاقة بين طول المتعلم و درجاته فى أحد الإختبارات

(٣) **الإرتباط غير التام** : و فيه يتبع أحد المتغيرين الآخر فى تغيره إلى حد ما

مثل : الإرتباط بين طول الفرد و وزنه

أنواع الإرتباط حسب طبيعة إتجاه المتغيرين :

(١) **الإرتباط الطردى** : وفيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاه واحد

أى أنهما يتبعان بعضهما فى الزيادة و النقص

مثل : الإرتباط بين أجر عامل و مدة خبرته

(٢) **الإرتباط العكسى** : و فيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاهين متضادتين

أى إذا زاد أحد المتغيرين نقص المتغير الآخر و العكس صحيح

مثل : العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة مع سعرها

أنواع الإرتباط حسب الوصف التحليلى لعلاقة الإرتباط :

(١) **إرتباط خطى** (٢) **إرتباط غير خطى**

و سندرس هنا الإرتباط الخطى (المستقيم) بين متغيرين فقط

و تقاس درجة العلاقة بين متغيرين بمقياس يسمى " **معامل الإرتباط** " (ر)

بعض خصائص معامل الإرتباط (ر) :

(١) ر تكون موجبة فى حالة الإرتباط الطردى و سالبة فى حالة الإرتباط العكسى

(٢) ر = صفر فى حالة الإرتباط المنعدم

(٣) ر = ١ فى حالة الإرتباط الطردى التام ، ر = − ١ فى حالة الإرتباط العكسى التام

(٤) ر ∈ [− ١ ، ١] أى : − ١ ≤ ر ≤ ١

(٥) قيمة معامل الإرتباط (ر) لا يتغير إذا طرحنا (أو جمعنا) أى عدد ثابت من جميع قيم المتغير الأول ، و أى عدد ثابت آخر من قيم المتغير الثانى

معامل إرتباط بيرسون للبيانات غير المبوبة :

بفرض إيجاد معامل الإرتباط بين متغيرين س ، ص حيث يكون :

للمتغير س قيم عددها ن هى : $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$

، للمتغير ص قيم عددها ن هى : $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ ، ... ، $ص_ن$

فإن : معامل الإرتباط الخطى أو معامل إرتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص يتعين من القانون :

$$ر = \frac{ن\,مجـ\,ص\,س - (مجـ\,س) \times (مجـ\,ص)}{\sqrt{ن\,مجـ\,س^٢ - (مجـ\,س)^٢} \times \sqrt{ن\,مجـ\,ص^٢ - (مجـ\,ص)^٢}}$$

مثال [١] أحسب معامل إرتباط بيرسون " معامل الإرتباط الخطى " بين س ، ص من الجدول التالى :

س	٨٠	٧٠	٥٥	٥٠	٤٧	٦٠	٦٨
ص	٦٠	٦٥	٥٤	٤٠	٤٠	٤٨	٥٩

الحلـــــــ

	س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
	٨٠	٦٠	٦٤٠٠	٣٦٠٠	٤٨٠٠
	٧٠	٦٥	٤٩٠٠	٤٢٢٥	٤٥٥٠
	٥٥	٥٤	٣٠٢٥	٢٩١٦	٢٩٧٠
	٥٠	٤٠	٢٥٠٠	١٦٠٠	٢٠٠٠
	٤٧	٤٠	٢٢٠٩	١٦٠٠	١٨٨٠
	٦٠	٤٨	٣٦٠٠	٢٣٠٤	٢٨٨٠
	٦٨	٥٩	٤٦٢٤	٣٤٨١	٤٠١٢
مجـ	٤٣٠	٣٦٦	٢٧٢٥٨	١٩٧٢٦	٢٣٠٩٢

$$ر = \frac{٧ \times ٢٣٠٩٢ - ٤٣٠ \times ٣٦٦}{\sqrt{٧ \times ٢٧٢٥٨ - (٤٣٠)^٢} \times \sqrt{٧ \times ١٩٧٢٦ - (٣٦٦)^٢}} = ٠,٨٦$$

و الإرتباط طردى

تدريب [١] أحسب معامل إرتباط بيرسون " معامل الإرتباط الخطى " بين س ، ص من الجدول الآتى :

س	٤٠	٢٣	١٨	١١	٢٩	٣٨
ص	٣٥	٣٠	٢١	١٧	٢٥	٤٢

ملاحظة : من الخاصية (٥) قيمة معامل الإرتباط (ر) لا يتغير إذا طرحنا (أو جمعنا) أى عدد ثابت من جميع قيم المتغير س ، و أى عدد ثابت آخر من قيم المتغير ص

أى إذا كان : سـ = س − س/ ، صـ = ص − ص/ فإن :

$$ر = \frac{ن\ مجـ سـ صـ - (مجـ سـ) \times (مجـ صـ)}{\sqrt{ن\ مجـ سـ^{٢} - (مجـ سـ)^{٢}} \times \sqrt{ن\ مجـ صـ^{٢} - (مجـ صـ)^{٢}}}$$

مثال [٢] بإستخدام الخاصية (٥) أوجد معامل الإرتباط بين س ، ص من البيانات الواردة فى مثال [١]

الحل

نختار س/ = ٦٠ ، ص/ = ٥٠

س	ص	سـ = س − ٦٠	صـ = ص − ٥	سـ²	صـ²	سـ صـ
٨٠	٦٠	٢٠	١٠	٤٠٠	١٠٠	٢٠٠
٧٠	٦٥	١٠	١٥	١٠٠	٢٢٥	١٥٠
٥٥	٥٤	−٥	٤	٢٥	١٦	−٢٠
٥٠	٤٠	−١٠	−١٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
٤٧	٤٠	−١٣	−١٠	١٦٩	١٠٠	١٣٠
٦٠	٤٨	٠	−٢	٠	٤	٠
٦٨	٥٩	٨	٩	٦٤	٨١	٧٢
مجـ		١٠	١٦	٨٥٨	٦٢٦	٦٣٢

$$ر = \frac{٧ \times ٦٣٢ - ١٠ \times ١٦}{\sqrt{٧ \times ٨٥٨ - (١٠)^{٢}} \times \sqrt{٧ \times ٦٢٦ - (١٦)^{٢}}} = ٠,٨٦$$

و هى نفس النتيجة التى حصلنا عليها

تدريب [٢] بإستخدام الخاصية (٥) أوجد معامل الإرتباط بين س ، ص من البيانات الواردة فى تدريب [١]

معامل إرتباط سبيرمان :

إذا كانت قيم المتغيرات غير محددة فإنه يمكن ترتيب البيانات حسب أهميتها أو حجمها مثلاً و منها يمكن إيجاد معامل إرتباط الرتب لسبيرمان و الذى يعتبر من المقاييس التقريبية لإيجاد معامل الإرتباط بين متغيرين لأنه يعتمد على رتب و ليس قيم المتغيرين و يصلح أيضاً لإيجاد معامل الإرتباط في بعض حالات البيانات الوصفية (التى لا تأخذ قيماً عددية)

و يتعين معامل الإرتباط من القانون : $ر = ١ - \frac{٦\ مجـ ف^{٢}}{ن\ (ن^{٢} - ١)}$

حيث : ن عدد قيم كل من المتغيرين ، ف الفرق بين كل رتبتين متناظرتين

ملاحظة : ترتب قيم المتغيرين تنازلياً أو تصاعدياً و عند تساوى قيمتان أو أكثر فإن رتبة كل من هذه القيم تكون مساوية للوسط الحسابى لرتب هذه القيم

مثال [٣] أحسب معامل الإرتباط لسبيرمان بين س ، ص من البيانات الواردة فى مثال [١]

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
٨٠	٦٠	٧	٦	١	١
٧٠	٦٥	٦	٧	−١	١
٥٥	٥٤	٣	٤	−١	١
٥٠	٤٠	٢	١,٥	٠,٥	٠,٢٥
٤٧	٤٠	١	١,٥	−٠,٥	٠,٢٥
٦٠	٤٨	٤	٣	١	١
٦٨	٥٩	٥	٥	٠	٠
مجـ					٤,٥

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٤,٥}{٧ \times ٤٨} = ٠,٨٦$$

تدريب [٣] أحسب معامل الإرتباط لسبيرمان بين س ، ص من البيانات الواردة فى تدريب [١]

تمارين (٦)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كانت قيمة معامل الإرتباط بين المتغيرين س ، ص تساوى ٠,٦٤ فإن قيمة معامل معامل الإرتباط بين المتغيرين س/ ، ص/ حيث : س/ = س – ٥ ، ص/ = ص – ٤ تساوى ....

١) ٠,٦٤ ٢) – ٠,٦٤ ٣) ١ ٤) – ١

[٢] ر ∈ ....

١)] – ١ ، ١ [٢)] – ١ ، ١] ٣) [– ١ ، ١ [٤) [– ١ ، ١]

[٣] إذا كان الإرتباط طردى تام فإن : ر = ...

١) ١ ٢) – ١ ٣) صفر ٤) ٠,٥

(٢) أوجد معامل الإرتباط الخطى بين المتغيرين س ، ص و حدد نوعه إذا كان :

مجـ س = ٥٠ ، مجـ ص = ٦٠ ، مجـ س ص = ٣٦١ ، مجـ س^{٢} = ٣١٠ ، مجـ ص^{٢} = ٤٩٨ ، ن = ١٠

(٣) أوجد معامل الإرتباط الخطى بين المتغيرين س ، ص محددا نوعه إذا كان :

مجـ س = ٦٠ ، مجـ ص = ٧٠ ، مجـ س ص = ٣٧١ ، مجـ س^{٢} = ٤٢٠ ، مجـ ص^{٢} = ٥٩٨ ، ن = ١٠

(٤) أوجد معامل الإرتباط الخطى بين المتغيرين س ، ص محددا نوعه إذا كان :

مجـ س = ٤١ ، مجـ ص = ٥٥ ، مجـ س ص = ٣٦٢٢ ، مجـ س^{٢} = ٢٥٦ ، مجـ ص^{٢} = ٥٢٣ ، ن = ٨

(٥) من بيانات الجدول التالى أوجد معامل الإرتباط الخطى لبيرسون محددا نوعه :

س	٢	٤	٥	٣	١١
ص	٦	٥	٣	٤	٢

(٦) من بيانات الجدول التالى أوجد معامل إرتباط الرتب لسبيرمان محددا نوعه :

س	٦	٩	١١	٧	٩	٨
ص	٦	٩	١٣	٨	١١	١٠

(٧) الجدول التالى يمثل حجم المبيعات س و الربح الناتج ص لمجموعة مكونة من ٦ شركات ، و المطلوب حساب معامل إرتباط الرتب بين حجم المبيعات و الربح :

س	٦	٩	١١	٧	٩	٨
ص	٦	٩	١٣	٨	١١	١٠

(٨) من بيانات الجدول التالى أوجد معامل إرتباط الرتب لسبيرمان و عين نوعه :

س	جيد	جيد جداً	ضعيف	ممتاز	مقبول	ضعيف
ص	مقبول	ضعيف	جيد	مقبول	جيد جداً	ممتاز

(٩) فى دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب فى مادتى الإحصاء و الإقتصاد بإحدى الكليات وجد أن تقديرات ستة طلاب فى المادتين كما يلى :

الإحصاء (س)	مقبول	ضعيف	جيد جداً	جيد	مقبول	ممتاز
الإقتصاد (ص)	جيد جداً	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد	جيد جداً

أحسب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات مبيناً نوعه

(١٠) الجدول التالى يوضح مجموعة مكون من ٦ كتب طبقاً لسعرها (س) و حجم المبيعات (ص)

س	منخفض	منخفض جداً	متوسط	مرتفع جداً	مرتفع	مرتفع جداً
ص	مرتفع	مرتفع	مرتفع جداً	منخلفض	متوسط	منخفض

أحسب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان بين سعر الكتاب و حجم المبيعات

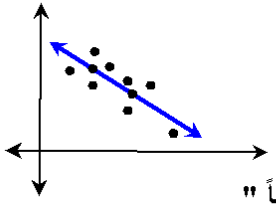
الإنحـــــــدار

عند دراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) س ، ص و كانت لدينا مجموعة من الأزواج المرتبة للقيم المتنظرة لهذين المتغيرين و لتكن :

($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، ... ، ($س_ن$ ، $ص_ن$)

و مثلنا هذه الأزواج المرتبة بنقط في المستوى الإحداثى فإننا نحصل على شكل يسمى " شكل الإنتشار " و هو يحدد نوع الإرتباط بين المتغيرين س ، ص و يأخذ هذا الشكل صوراً مختلفة " مستقيم أو منحنى " تتوقف على نوع العلاقة بين المتغيرين فمثلاً :

* قد تقع جميع هذه النقط على الخط المستقيم أو المنحنىفيكون الإرتباط بين المتغيرين (طردياً أو عكسياً) تاماً



* قد تنتشر النقط فى جميع أرجاء المستوى دون أى رابط بينها يكون الإرتباط بين المتغرين منعدماً
* قد تنتشرالنقط بحيث تبدو أنها تقع بنسب متفوتة على الخط المستقيم أو المنحنى فيكون الإرتباط بين المتغرين طردياً أو عكسياً كما في الشكل المقابل " عكسياً "

خط الإنحدار :

هو الخط المستقيم الذى يعبر عن العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، و يفيد هذا الخط فى التنبؤ و لو بالتقريب عن قيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر و كلما أقتربت النقط من خط الإنحدار كلما زادت درجة الإرتباط بين المتغيرين

طرق إيجاد معادلة خط الإنحدار :

(١) طريقة المربعات الصغرى :

تعتمد هذه الطريقة على توفيق أفضل خط مستقيم لمجموعة من النقط على جعل مجموع مربعات إنحرفات النقط عن هذا المستقيم أصغر ما يمكن

و تكون معادلة خط الإنحدار كما يلى :

أولاً : معادلة إنحدار ص على س : ص = أ س + ب

" حيث أ معامل إنحدار ص على س "

$$أ = \frac{ن\ مجـ س ص - (مجـ س) \times (مجـ ص)}{ن\ مجـ س^٢ - (مجـ س)^٢}$$ ،

$$ب = \frac{مجـ ص - أ\ مجـ س}{ن}$$ ،

ثانياً : معادلة إنحدار س على ص : س = حـ ص + ء

" حيث حـ معامل إنحدار س على ص "

$$حـ = \frac{ن\ مجـ س ص - (مجـ س) \times (مجـ ص)}{ن\ مجـ ص^٢ - (مجـ ص)^٢}$$ ،

$$ء = \frac{مجـ س - حـ\ مجـ ص}{ن}$$ ،

مثال [١] من بيانات الجدول التالى أوجد قيمة ص عندما س = ١٣ بإستخدام خط الإنحدار المناسب

س	٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢
ص	١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨

الحلـــ

خط الإنحدار المناسب هو : خط إنحدار ص على س

ص = أ س + ب

	س	ص	$س^٢$	س ص
	٩	١٥	٨١	١٣٥
	١٢	٢٠	١٤٤	٢٤٠
	١١	١٩	١٢١	٢٠٩
	١٤	٢٣	١٩٦	٣٢٢
	١٢	١٨	١٤٤	٢١٦
مجـ	٦٨	١١٢	٧٨٦	١٢٩٢

$$أ = \frac{٦ \times ١٢٩٢ - ٦٨ \times ١١٢}{٦ \times ٧٨٦ - (٦٨)^٢}$$ ،

= ١,٤٨

$$ب = \frac{١١٢ - ١,٤٨ \times ٦٨}{٦}$$ ،

= ١,٩١

∴ ص = ١,٤٨ س + ١,٩١

عندما : س = ١٣ فإن : ص = ١,٤٨ × ١٣ + ١,٩١ = ٢١,١٣

تدريب [١] من بيانات الجدول التالى أوجد قيمة ص عندما س = ٢٠ بإستخدام خط الإنحدار المناسب

س	٨	٦	١٠	٧	٨	٥
ص	٨	٧	١٣	٩	١٠	٥

مثال [٢] من بيانات الجدول التالى أوجد قيمة س عندما ص = ٧ بإستخدام خط الإنحدار المناسب

س	٨	٧	٦	٥	٩	٧
ص	٦	٥	٨	٤	١٠	٣

الحل

خط الإنحدار المناسب هو : خط إنحدار س على ص

س = أ ص + ب

س	ص	ص^{٢}	س ص
٨	٦	٣٦	٤٨
٧	٥	٢٥	٣٥
٦	٨	٦٤	٤٨
٥	٤	١٦	٢٠
٩	١٠	١٠٠	٩٠
٧	٣	٩	٢١
مجـ	٤٢	٣٦	٢٥٠	٢٦٢

$$\text{،}\ \text{أ} = \frac{٦ \times ٢٦٢ - ٤٢ \times ٣٦}{٦ \times ٢٥٠ - (٣٦)^{٢}}$$

= ٠,٢٩٤

$$\text{،}\ \text{ب} = \frac{٤٢ - ٠,٢٩٤ \times ٣٦}{٦}$$

= ٥,٠٢٤

∴ س = ٠,٢٩٤ ص + ٥,٠٢٤

عندما : ص = ٧ فإن : س = ٠,٢٩٤ × ٧ + ٥,٠٢٤ = ٧,٣

تدريب [٢] من بيانات الجدول التالى أوجد قيمة س عندما ص = ٧ بإستخدام خط الإنحدار المناسب

س	٥	٢	٦	٩	٢	٧
ص	٣	٧	٦	٨	٥	٦

طرق مختصرة لإيجاد خطوط الإنحدار

لتصغير الأعداد المتستخدمة لحساب أ ، ب ، حـ ، ء في معادلات خطوط الإنحدار و تسهيل العمليات الحسابية تستخدم إحدى الطريقتين التاليتين :

(١) طريقة الإنحرافات :

بفرض أن : سـ = س – و ، صـ = ص – هـ

حيث : و ، هـ أى عددين ثابتين يتم إختيارهما حسب ظروف المسألة

نوجد معادلة خط الإنحدار المطلوبة بدلالة سـ ، صـ ثم نعوض عنهما بدلالة س ، ص لنحصل على معادلة خط الإنحدار المطلوبة منسوبة إلى المفردات الأصلية

(٢) طريقة الإنحرافات المبسطة :

بفرض أن : $\text{سـ}' = \frac{\text{س} - \text{و}}{\text{ل}}$ ، $\text{صـ}' = \frac{\text{ص} - \text{هـ}}{\text{م}}$

حيث : و ، هـ ، ل ، م أعداد ثابتة مختارة حسب ظروف المسألة

نوجد معادلة خط الإنحدار المطلوبة بدلالة سـ$'$ ، صـ$'$ ثم نعوض عنهما بدلالة س ، ص لنحصل على معادلة خط الإنحدار المطلوبة منسوبة إلى المفردات الأصلية

مثال [٣] الجدول التالى يبين دخل و إستهلاك سبع أسر في أحد الأحياء بمدينة ما بعشرات الجنيهات أوجد خط إنحدار الإستهلاك على الدخل بإستخدام طريقة الإنحرافات

الدخل (س)	٣٨	٣٢	٤٢	٤٨	٤٠	٤٤	٥٠
الإستهلاك (ص)	٢٤	٢١	٢٧	٣٠	٢٧	٣٣	٣٦

الحل

س	ص	سـ = س – ٤٠	صـ = ص – ٢٧	سـ^{٢}	سـ صـ
٣٨	٢٤	– ٢	– ٣	٤	٦
٣٢	٢١	– ٨	– ٦	٦٤	٤٨
٤٢	٢٧	٢	صفر	٤	صفر
٤٨	٣٠	٨	٣	٦٤	٢٤
٤٠	٢٧	صفر	صفر	صفر	صفر
٤٤	٣٣	٤	٦	١٦	٢٤
٥٠	٣٦	١٠	٩	١٠٠	٩٠
مجـ		١٤	٩	١٩٢	٢٥٢

$$\therefore\ \text{أ} = \frac{\text{ن مجـ سـ صـ} - (\text{مجـ سـ}) \times (\text{مجـ صـ})}{\text{ن مجـ سـ}^{٢} - (\text{مجـ سـ})^{٢}}$$

$$= \frac{٧ \times ١٩٢ - ١٤ \times ٩}{٧ \times ٢٥٢ - (١٤)^{٢}} = ٠,٧٧٧$$

$$\text{،}\ \text{ب} = \frac{\text{مجـ صـ} - \text{أ مجـ سـ}}{\text{ن}} = \frac{٩ - ٠,٧٧٧ \times ١٤}{٧} = -٠,٢٧$$

∴ معادلة خط إنحدار ص على س هى : ص = ٠,٧٧٧ س − ٠,٢٧

و معادلة خط إنحدار ص (الإستهلاك) على س (الدخل) هى :

ص − ٢٧ = ٠,٧٧٧ (س − ٤٠) − ٠,٢٧

∴ ص = ٠,٧٧٧ س − ٤,٣٥

تدريب [٣] من بيانات الجدول التالى أوجد خط إنحدار ص على س بإستخدام طريقة الإنحرافات

س	٣٢	٢٨	٣٠	٢٠	٣٥	٢٨	٣٣	٢٦
ص	٣٦	٤٥	٤٢	٣٨	٤٧	٢٩	٤١	٣٢

مثال [٤] من بيانات مثال [٣] أوجد خط إنحدار الإستهلاك على الدخل بإستخدام طريقة الإنحرافات البسيطة

الحل

س	ص	$س' = \frac{س - ٤٠}{٢}$	$ص' = \frac{ص - ٢٧}{٣}$	$س'^{٢}$	$س' ص'$
٣٨	٢٤	−١	−١	١	١
٣٢	٢١	−٤	−٢	١٦	٨
٤٢	٢٧	١	صفر	١	صفر
٤٨	٣٠	٤	١	١٦	٤
٤٠	٢٧	صفر	صفر	صفر	صفر
٤٤	٣٣	٢	٢	٤	٤
٥٠	٣٦	٥	٣	٢٥	١٥
مجـ		٧	٣	٣٢	٦٣

$$\therefore \text{أ} = \frac{\text{ن مجـ } س' ص' - (\text{مجـ } س')(\text{مجـ } ص')}{\text{ن مجـ } س'^{٢} - (\text{مجـ } س')^{٢}}$$

$$= \frac{٧ \times ٣٢ - ٧ \times ٣}{٧ \times ٦٣ - (٧)^{٢}} = ٠,٥١٨$$

$$، \text{ب} = \frac{\text{مجـ } ص' - \text{أ مجـ } س'}{\text{ن}} = \frac{٣ - ٠,٥١٨ \times ٧}{٧} = -٠,٠٩$$

∴ معادلة خط إنحدار ص' على س' هى : ص' = ٠,٥١٨ س' − ٠,٠٩

و معادلة خط إنحدار ص (الإستهلاك) على س (الدخل) هى :

$$\frac{ص - ٢٧}{٣} = ٠,٧٧٧ \left(\frac{س - ٤٠}{٢}\right) - ٠,٠٩$$

∴ ص = ٠,٧٧٧ س − ٤,٣٥

تدريب [٣] من بيانات تدريب [٣] أوجد خط إنحدار ص على س بإستخدام طريقة الإنحرافات البسيطة

العلاقة بين معامل الإنحدار و معامل الإرتباط :

إذا كانت : معادلة إنحدار ص على س : ص = أ س + ب

حيث : أ معامل إنحدار ص على س

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

و كانت : معادلة إنحدار س على ص : س = حـ ص + ء

حيث : حـ معامل إنحدار س على ص

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}$$

$$، \because \text{ر} = \frac{\text{ن مجـ ص س} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} \times \sqrt{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}}$$

فإن : $\text{ر}^{٢}$ = أ × حـ

ملاحظة :

ر له إشارة مماثلة لإشارتى كل من أ ، حـ

مثال [٥] إذا كان : مجـ س = ٦٧ ، مجـ ص = ٥٨ ، مجـ س^{٢} = ١٣١٢ ، مجـ ص^{٢} = ٥٨٧ ، مجـ س ص = ٣٨٦ ، ن = ٧ فإوجد معامل خط إنحدار ص على س ، معامل خط إنحدار س على ص ثم إستنتج معامل لاالإرتباط الخطى بين س ، ص مستخدماً معاملى الإنحدار و بين نوعه

الحل

$$أ = \frac{٧ \times ٣٦٤ - ٦٧ \times ٥٨}{٧ \times ١٣١٢ - (٦٧)^{٢}} = -٠,٢٥٢ \quad ،$$

$$حـ = \frac{٧ \times ٣٦٤ - ٦٧ \times ٥٨}{٧ \times ٥٨٧ - (٥٨)^{٢}} = -١,٥٨٩$$

$$\because ر^{٢} = أ \times حـ \quad ،$$

$$\therefore ر = \sqrt{(-٠,٢٥٢) \times (-١,٥٨٩)} = -٠,٦٣$$ عكسى

تدريب [٥] إذا كان : مجـ س = ٥٠ ، مجـ ص = ٦٠ ، مجـ س ص = ٣٦١ ، مجـ س^{٢} = ٣١٠ ، مجـ ص^{٢} = ٤٩٨ ، ن = ١٠
فإوجد معامل خط إنحدار ص على س ، معامل خط إنحدار س على ص ثم إستنتج معامل لاالإرتباط الخطى بين س ، ص مستخدماً معاملى الإنحدار و بين نوعه

تمارين (٧)

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كان معامل إنحدار س على ص هو – ٠,٢٥ ، و معامل إنحدار ص على س هو – ٠,٨١ فإن معامل الإرتباط الخطى بين س ، ص هو ....

١) ٤,٥ ٢) – ٤,٥ ٣) ٠,٤٥ ٤) – ٠,٤٥

[٢] إذا كان معامل إنحدار ص على س هو ٢,٤ ، معامل الإرتباط الخطى بين س ، ص هو – ٠,٦ فإن معامل إنحدار س على ص هو ....

١) ٠,١٥ ٢) – ٠,١٥ ٣) ١,٥ ٤) – ١,٥

[٣] إذا كان معامل الإرتباط الخطى بين س ، ص هو – ٠,٩٥ ، و معامل إنحدار س على ص – ١,٨٨ ، فإن معامل إنحدار ص على س هو ٢,٤ هو ....

١) ٠,٤٨ ٢) – ٠,٤٨ ٣) ٤,٨ ٤) – ٤,٨

(٢) من بيانات الجدول التالى أوجد قيمة ص عندما س = ٦
بإستخدام خط الإنحدار المناسب

س	٧	٨	١١	٧	١٠	٩
ص	٥	٨	٩	٨	٩	١٠

(٣) من بيانات الجدول التالى أوجد قيمة س عندما ص = ٣
بإستخدام خط الإنحدار المناسب

س	٥	١٠	٣	٨	٦	٧
ص	٤	٨	٢	٦	٤	٥

(٤) إذا كان : مجـ س = ٤١ ، مجـ ص = ٥٥ ، مجـ س^{٢} = ٢٥٦ ، مجـ ص^{٢} = ٥٢٣ ، مجـ س ص = ٣٦٢ ، ن = ٨ فإوجد معادلة خط إنحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ١٠

(٥) إذا كان : مجـ س = ١٠٢ ، مجـ ص = ١٢٤ ، مجـ س^{٢} = ١٠٩٠ ، مجـ ص^{٢} = ١٥٦٤ ، مجـ س ص = ١٢٦٣ ، ن = ١٠ فإوجد معادلة خط إنحدار س على ص ثم قدر قيمة س عندما ص = ١٤

(٦) عند دراسة العلاقة بين عدد سنوات الخبرة فى العمل (س) و المرتب الشهرى (ص) بالجنيه لمجموعة مكونة من ٢٠ موظفاً وجدت البيانات التالية : مجـ س = ٣٠٠ ،

مجـ ص = ٢٥٠٠٠ ، مجـ س^{٢} = ٥٥٠٠ ، مجـ ص^{٢} = ٤٥٠٠٠٠٠٠

، مجـ س ص = ٤٥٠٠٠٠ فإوجد معادلة خط إنحدار المرتب الشهرى على عدد سنوات الخبرة ثم أوجد مرتب كوظف خبرته في العمل ١٠ سنوات

(٧) فى تجربة لدراسة العلاقة بين الدخل (س) و الإستهلاك (ص) بالألف جنيه سنوياً لعدد من الأسر و بإستخدام طريقة الإنحرافات حصلنا على ما يلى : مجـ سـ = ٠ ،

مجـ صـ = ٠ ، مجـ سـ^{٢} = ٢٢٤ ، مجـ صـ^{٢} = ١٣٢ ، مجـ سـ صـ = ١٥٨

حيث سـ = س – ٤٢ ، صـ = ص – ٢٨ فإوجد معادلة خط إنحدار الإستهلاك على الدخل ثم قدر ما توفره أسرة دخلها السنوى ١٠٠٠٠ جنيه

(٨) فى دراسة للعلاقة بين المتغيرين س ، ص حصلنا على البيانات الآتية :

ر = ٨ ، سـ$'$ = $\frac{س - ٤٠}{٥}$ ، صـ$'$ = $\frac{ص - ١٥}{٣}$ حيث : مجـ سـ$'$ = ٦ ،

مجـ صـ$'$ = ١ ، مجـ سـ$'^{٢}$ = ١٢٩ ، مجـ صـ$'^{٢}$ = ٢٩ ، مجـ سـ$'$ صـ$'$ = ٥٩

اوجد معامل إنحدار ص على س ، معامل إنحدار س على ص و من ذلك أحسب معامل الإرتباط الخطى بين س ، ص

(٩) إذا كان : مجـ س = ٦٠ ، مجـ ص = ٧٠ ، مجـ س^{٢} = ٤٢٠ ، مجـ ص^{٢} = ٥٩٨

، مجـ س ص = ٣٧١ ، ر = ١٠ فإوجد قيمة معامل الإرتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص ثم أوجد قيمة معامل إنحدار ص على س و من ذلك إستنتج قيمة معامل إنحدار س على ص

(١٠) إذا كان س ، ص متغيرين يمثلان السعر بالجنيه في بورصة الأوراق المالية لورقتين ماليتين و كان معامل إنحدار ص على س هو – ٠,١٦ ومعامل إنحدار س على ص هو – ٠,٣٦ إوجد معامل الإرتباط بين س ، ص وحدد نوعه

(١١) إذا كانت معادلة خط إنحدار ص على س هى ٢٥ ص – ١٠ س = ١٧ و كانت معادلة خط إنحدار س على ص هى ٥ س = ٨ ص + ٢٠ فإوجد معامل الإرتباط بين س ، ص

جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعى المعيارى

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٠٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٥	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٠٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٠٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٠٤٧٦١	٤٧٦٧,٠
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٠٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٠٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨

الإرشادات – تمارين (١)

(١)

[١] صفر [٢] $\frac{١}{٤}$ [٣] ٠,٥ [٤] ل (أ) [٥] $\frac{١}{٣}$

[٦] ٠,٥ [٧] $\frac{١}{١٢}$ [٨] $\frac{١}{٣}$ [٩] ١٠ ٪ [١٠] $\frac{١}{٢}$

(٢) ف = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك)
، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}
، ن (ف) = ٨

أ = {(ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك)
، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص)}

∴ ن (أ) = ٦ ∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

ب = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك)
، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص)}

∴ ن (ب) = ٧ ∴ ل (ب) = $\frac{٧}{٨}$

(٣) ف = {(و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (و ، ب ، ب) ، (ب ، و ، و)
، (ب ، و ، ب) ، (ب ، ب ، و) ، (ب ، ب ، ب)} ، ن (ف) = ٨

أ = {(ب ، و ، و) ، (ب ، و ، ب) ، (ب ، ب ، و) ، (ب ، ب ، ب)}

∴ ن (أ) = ٤ ∴ ل (أ) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

ب = {(و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (ب ، و ، و)}

∴ ن (ب) = ٣ ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٨}$

(٤) ف = {(ص ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٥) ، (ص ، ٦)
، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}
، ن (ف) = ١٢ ، أ = {(ك ، ١) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٥)}

∴ ن (أ) = ٣ ∴ ل (أ) = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

ف = {(ص ، ١) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

∴ ن (ب) = ٦ ∴ ل (ب) = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

(٥) ∵ إحتمال التعادل = ٠,٣ ، إحتمال الفوز = ٠,٥

∴ إحتمال الخسارة = ١ – (٠,٣ + ٠,٥) = ٠,٢

∴ عدد المباريات التى يخسرها هذا النادى فى الدورى = ٣٠ × ٠,٢ = ٦ مباريات

(٦) ن (ف) = ٢٠ ن (أ) = ٤ ∴ ل (أ) = $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

ن (ب) = ٤ + ٩ = ١٣ ∴ ل (ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$

ن (ج) = ٩ + ٧ = ١٦ ∴ ل (ج) = $\frac{١٦}{٢٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

(٧) ف = { ١ ، ٢ ، ... ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ... ، ١٤ } ن (ف) = ١٤

بيضاء حمراء

أ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ } ∴ ن (أ) = ٦ ∴ ل (أ) = $\frac{٦}{١٤}$ = $\frac{٣}{٧}$

ب = { ١ ، ٤ ، ٩ } ∴ ن (ب) = ٣ ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{١٤}$

ج = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ∴ ن (ج) = ٤ ∴ ل (ج) = $\frac{٤}{١٤}$ = $\frac{٢}{٧}$

ء = { ١٠ ، ١٢ ، ١٤ } ∴ ن (ء) = ٣ ∴ ل (ء) = $\frac{٣}{١٤}$

(٨) ن (ف) = ٢٨ شخصا من عدة دول منهم ٧ من السودان
، ١٢ من فرنسا ، ٤ من الهند ، ٥ من البرازيل اختير شخص منهم عشوائيا اوجد إحتمال

أولاً : إحتمال أن يكون الشخص من فرنسا = $\frac{١٢}{٢٨}$ = $\frac{٣}{٧}$

ثانياً : إحتمال أن يكون الشخص من السودان أو الهند = $\frac{١١}{٢٨}$

ثالثاً : إحتمال أن يكون الشخص ليس من البرازيل = $\frac{٢٣}{٢٨}$

رابعاً : إحتمال أن يكون الشخص من مصر = صفر

(٩) ف = { ١ ، ٢ ، ... ، ٣٠ } ن (ف) = ٣٠

أ = { ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ } ∴ ن (أ) = ٣ ∴ ل (أ) = $\frac{١٠}{٣٠}$ = $\frac{١}{٣}$

ب = { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٣٠ }

∴ ن (ب) = ١٤ ∴ ل (ب) = $\frac{١٤}{٣٠}$ = $\frac{٧}{١٥}$

(١٠) ف = { ٣٢ ، ٤٢ ، ٥٢ ، ٦٢ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ٥٣ ، ٦٣ ، ٢٤ ، ٣٤ ، ٥٤ ، ٦٤ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٦٥ ، ٢٦ ، ٣٦ ، ٤٦ ، ٥٦ } ، ن (ف) = ٢٠

أ = { ٣٢ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٣٤ ، ٥٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٥٦ }

∴ ن (أ) = ٨ ∴ ل (أ) = $\frac{٨}{٢٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

ب = { ٣٢ ، ٤٢ ، ٥٢ ، ٦٢ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ٥٣ ، ٦٣ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٦٥ }

∴ ن (ب) = ١٢ ∴ ل (ب) = $\frac{١٢}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

ج = { ٣٢ ، ٤٢ ، ٥٢ ، ٦٢ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ٥٣ ، ٦٣ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٦٥ ، ٣٤ ، ٥٤ ، ٣٦ ، ٥٦ } ∴ ن (ج) = ١٦ ∴ ل (ج) = $\frac{١٦}{٢٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

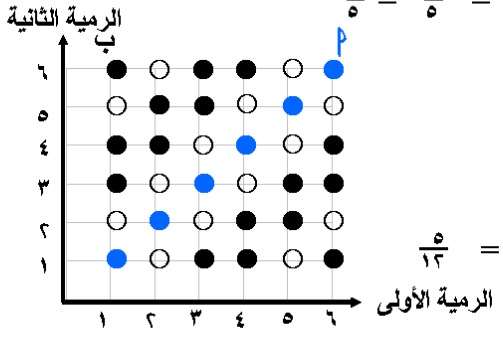
حل آخر للجزء الأخير : أ ∩ ب = { ٣٢ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٣٥ }

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

ل (ج) = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{٣}{٥}$ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

(١١) من الشكل المقابل :



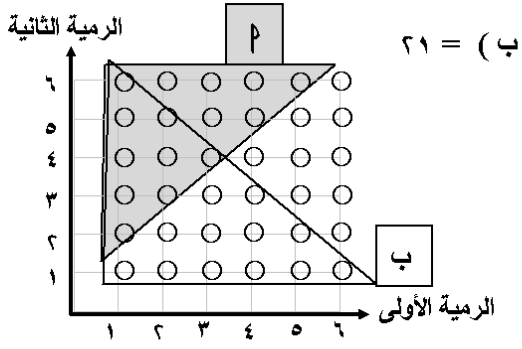
ن (ف) = ٣٦ ،

ن (أ) = ٦

∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

، ن (ب) = ٦ ∴ ل (ب) = $\frac{١٥}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٢}$

(١٢) من الشكل المقابل :



ن (ف) = ٣٦ ، ن (أ) = ١٥

∴ ل (أ) = $\frac{١٥}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٢}$ ، ن (ب) = ٢١

∴ ل (ب) = $\frac{٢١}{٣٦}$ = $\frac{٧}{١٢}$

، ن (أ ∩ ب) = ٩

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (أ − ب) = $\frac{٥}{١٢}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٦}$

(١٣) ف = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٦) } ، ن (ف) = ٩

أ = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) } ∴ ن (أ) = ٣ ∴ ل (أ) = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

ب = { (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) }

∴ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٩}$

، أ ∩ ب = { (٢ ، ٤) } ∴ ن (أ ∩ ب) = ١ ، ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٩}$

∴ ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{٤}{٩}$ − $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

، ل (أ′ ∩ ب′) = ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب) = ١ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

(١٤) ل (ب) = ١ − ل (ب′) = ١ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$

، ل (أ′ ∩ ب′) = ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب)

= ١ − [$\frac{١}{٤}$ + $\frac{٥}{٨}$ − $\frac{١}{٨}$] = $\frac{١}{٤}$

، ل (ب − أ) = $\frac{٥}{٨}$ − $\frac{١}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

(١٥) ل (أ′ ∪ ب) = ل (أ − ب)′ = ١ − ل (أ − ب)

= ١ − [٠,٧ − ٠,٣] = ٠,٦

، ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ٠,٧ + ٠,٤ − ٠,٦ = ٠,٥

(١٦) ∵ ل (أ − ب) = $\frac{١}{٨}$ ∴ $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ − ل (أ ∩ ب)

و منها : ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٨}$

∴ ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب) = ١ − [$\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{٥}{٨}$] = $\frac{٥}{٢٤}$

، ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$

(١٧) ∵ أ ، ب حدثين متنافيين ، ل (أ − ب) = $\frac{١}{٢}$ ∴ ل (أ) = ل (أ − ب) = $\frac{١}{٢}$

، ∵ ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{١}{٢}$ + ل (ب) و منها : ل (ب) = $\frac{٤}{١٥}$

(١٨) ∵ ٣ ل (أ) = ٤ ل (ب) ∴ ل (أ) = $\frac{٤}{٣}$ ل (ب) (١)

، ∵ أ ، ب حدثين متنافيين ∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ $\frac{٥}{٦}$ = ل (أ) + $\frac{٤}{٣}$ ل (أ) و منها : ل (أ) = $\frac{١٠}{٢١}$

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل (ب) = $\frac{٥}{١٤}$

ل (أ′) = ١ − $\frac{١٠}{٢١}$ = $\frac{١١}{٢١}$

(١٩) ل (ب) = ١ − $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

، ∵ ل [ف − (أ ∪ ب)] = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ل (ف) − ل (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$

∴ ١ − ل (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

أولاً : ∵ أ ، ب متنافيان ∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ $\frac{١}{٣}$ = س + $\frac{١}{٤}$ و منها : س = $\frac{١}{١٢}$

ثانياً : ∵ ب ⊂ أ ∴ (أ ∪ ب) = ل (أ)

∴ س = $\frac{١}{٣}$

(٢٠) أولاً : وقوع حدث واحد على الأقل = ل (أ ∪ ب)

= ٠,٤ + ٠,٨ − ٠,٣ = ٠,٩

ثانياً : عدم وقوع الحدثين أ ، ب معا = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب)

= ١ − ٠,٣ = ٠,٨

ثالثاً : وقوع أحد الحدثين دون الآخر = ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)]

= ٠,٤ + ٠,٨ − ٠,٦ = ٠,٦

(٢١) بفرض أن : ر ترمز لفوز أ ، ن ترمز لفوز ب ، ك ترمز لفوز ج

، ل (ر) = س ، ∵ ل (ر) = $\frac{١}{٢}$ ل (ن)

∴ ل (ن) = ٢ ل (ر) = ٢ س

، ∵ ل (ك) = ٢ ل (ر) ∴ ل (ك) = $\frac{١}{٢}$ ل (ر) = $\frac{١}{٢}$ س

، ∵ ف = { ر ، ن ، ك }

∴ ل (ر) + ل (ن) + ل (ك) = ١

∴ س + ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س = ١ و منها : س = $\frac{٢}{٧}$

∴ ل (ر) = $\frac{٢}{٧}$ ، ل (ك) = $\frac{١}{٧}$

∴ إحتمال فوز أ أو ج = ل (ر) + ل (ك) = $\frac{٢}{٧}$ + $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٣}{٧}$

(٢٢) ل (أ) = $\frac{٦٤}{١٢٠}$ = $\frac{٨}{١٥}$ ، ل (ب) = $\frac{٤٠}{١٢٠}$ = $\frac{١}{٣}$

ل (ج) = ل (أ ∩ ب) = $\frac{١٦}{١٢٠}$ = $\frac{٢}{١٥}$

ل (ء) = ل (أ ∪ ب) = $\frac{٨}{١٥}$ + $\frac{١}{٣}$ − $\frac{٢}{١٥}$ = $\frac{١١}{١٥}$

(٢٣) ∵ ل (١) + ل (٢) + ل (٣) + ل (٤) + ل (٥) + ل (٦) = ١

∴ ٠,١٤ + س + ٠,١٧ + ٠,٣ + ٠,١٨ + ٠,١٦ = ١

ومنها : س = ٠,٠٥

أولاً : إحتمال ظهور عدد زوجى = ل (٢) + ل (٤) + ل (٦)

= ٠,٠٥ + ٠,٣ + ٠,١٦ = ٠,٥١

ثانياً : إحتمال ظهور عدد أولى = ل (٢) + ل (٣) + ل (٥)

= ٠,٠٥ + ٠,١٧ + ٠,١٨ = ٠,٤

ثالثاً : إحتمال ظهور عدد فردى = ل (١) + ل (٣) + ل (٥)

= ٠,١٤ + ٠,١٧ + ٠,١٨ = ٠,٤٩

رابعاً : إحتمال ظهور عدد زوجى أولى = ل (٢) = ٠,٠٥

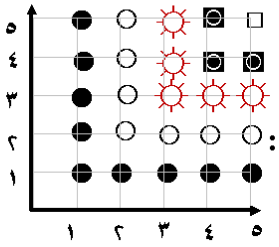
تمارين (٢)

(١)

[١] ١١,٤ [٢] ٢٥٦ [٣] ٧٥

(٢) الشكل المقابل يوضح الأحداث المتنافية المرتبطة بالمتغير العشوائى س ، ن (ف) = ٢٥

، المدى = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }



و التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	١	٢	٣	٤	٥
د (س)	$\frac{٩}{٢٥}$	$\frac{٧}{٢٥}$	$\frac{٥}{٢٥}$	$\frac{٣}{٢٥}$	$\frac{١}{٢٥}$

و لحساب المتوسط و التباين نكون الجدول التالى :

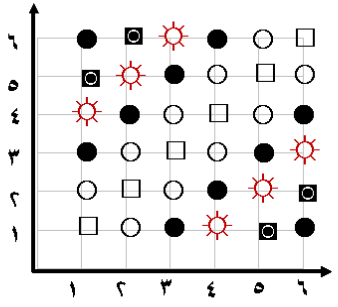
$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^٢ \cdot د(س_ر)$
١	$\frac{٩}{٢٥}$	$\frac{٩}{٢٥}$	$\frac{٩}{٢٥}$
٢	$\frac{٧}{٢٥}$	$\frac{١٤}{٢٥}$	$\frac{٢٨}{٢٥}$
٣	$\frac{٥}{٢٥}$	$\frac{١٥}{٢٥}$	$\frac{٤٥}{٢٥}$
٤	$\frac{٣}{٢٥}$	$\frac{١٢}{٢٥}$	$\frac{٤٨}{٢٥}$
٥	$\frac{١}{٢٥}$	$\frac{٥}{٢٥}$	$\frac{٢٥}{٢٥}$
		$\frac{٥٥}{٢٥}$ = ٢,٢	$\frac{١٥٥}{٢٥}$ = ٦,٢

من الجدول : المتوسط " التوقع " (μ) = ٢,٢

، التباين = ٦,٢ – (٢,٢)^٢ = ١,٣٦

(٣) الشكل المقابل يوضح الأحداث المتنافية المرتبطة بالمتغير العشوائى س ، ن (ف) = ٣٦

، المدى = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }



و التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
د (س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر) = \frac{٣٥}{١٨}$ ∴ $\mu = \frac{٣٥}{١٨}$

، $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \cdot د(س_ر) = \frac{٣٥}{٦}$

، ينتج : $\sigma^٢ = \frac{٣٥}{٦} - \left(\frac{٣٥}{١٨}\right)^٢ = ٢,٠٥$ ، $\sigma = ١,٤٣$

(٤) ٠,١ + ل (س = ٢) + ٠,٢ + ٠,٤ = ١ و منها : ل (س = ٢) = ٠,٣

و التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	٠	١	٢	٣
د (س)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر) = ٢$ ∴ $\mu = ٢$

، $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \cdot د(س_ر) = ٥,٢$

، ينتج : $\sigma^٢ = ٥,٢ - ٤ = ١,٢$ ، $\sigma = ١,٠٩٥$

(٥) $\frac{١}{١٥}$ (ك – ١) + $\frac{١}{١٥}$ ك + $\frac{١}{١٥}$ (ك + ١) + $\frac{١}{١٥}$ (ك + ٢) + $\frac{١}{١٥}$ (ك – ٢) = ١

و منها : ك = ٣ و التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	– ٢	– ١	٠	١	٢
د (س)	$\frac{٢}{١٥}$	$\frac{٣}{١٥}$	$\frac{٤}{١٥}$	$\frac{٥}{١٥}$	$\frac{١}{١٥}$

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر) = \frac{١}{٣}$ ∴ $\mu = \frac{١}{٣}$

، $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \cdot د(س_ر) = \frac{٤}{٣}$

، ينتج : $\sigma^٢ = \frac{٤}{٣} - \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ = ١,٢٢$ ، $\sigma = ١,١١$

(٦) بفرض أن : ل (س = ١) = ك ، ل (س = ٢) = م

، ∵ المدى = { ١ ، ٢ } ، $\mu = \frac{٥}{٤}$

∴ ك + م = ١ (١) ، ك + ٢ م = $\frac{٥}{٤}$ (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج : ك = $\frac{٣}{٤}$ ، م = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (س = ١) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (س = ٢) = $\frac{١}{٤}$

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$. د (س$_ر$) = $\frac{٧}{٤}$

، ينتج : $\sigma^٢ = \frac{٧}{٤} - \left(\frac{٥}{٤}\right)^٢ = ٠,١٩$ ، $\sigma = ٠,٤٣٣$

، معامل الإختلاف = $\frac{٠,٤٣٣}{\frac{٥}{٤}} \times ١٠٠\%$ = ٣٥ ٪

(٧) $\frac{١}{٢٠}$ أ + $\frac{١}{٢٠}$ ب + $\frac{٤}{٢٠}$ + $\frac{٥}{٢٠}$ + $\frac{٧}{٢٠}$ = ١ أى : أ + ب = ٤ (١)

، ∵ ل (ب < س < ٥) = ٠,٦ ∴ ل (ب) + ل (٤) + ل (٥) = ٠,٦

∴ $\frac{١}{٢٠}$ ب + $\frac{٤}{٢٠}$ + $\frac{٥}{٢٠}$ = ٠,٦ و منها : ب = ٣ ، من (١) : أ = ١

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$. د (س$_ر$) = ٥ ∴ μ = ٥

، $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$. د (س$_ر$) = ٢٨ ، ينتج : $\sigma^٢$ = ٢٨ − (٥)^٢ = ٣

(٨) ٠,٢ + ٠,٣ + ك + ٠,١ = ١ و منها : ك = ٠,٤

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$. د (س$_ر$) = ٣ ∴ μ = ٣

، $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$. د (س$_ر$) = ١١,٤

، ينتج : $\sigma^٢$ = ١١,٤ − ٩ = ٢,٤ ، σ = ١,٥٥

(٩) م + ٢ م + ٤ م + ٣ م = ١ و منها : م = ٠,١

و التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	٠	١	٢	٣
د (س)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$. د (س$_ر$) = ٢,٧ ∴ μ = ٢,٧

، $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$. د (س$_ر$) = ٨,٩

، ينتج : $\sigma^٢$ = ٨,٩ − (٢,٧)^٢ = ١,٦١ ، σ = ١,٢٧

(١٠) ٠,٢ + ب + ٠,٤ + ٠,١ = ١ و منها : ب = ٠,٣

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$. د (س$_ر$) = ٢,٤ + أ ، ∵ μ = ٣

∴ أ = ٦ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$. د (س$_ر$) = ٧,٨ + ٠,١ أ^٢

، ينتج : $\sigma^٢$ = ٧,٨ + ٠,١ × ٣٦ − ٩ = ٢,٤ ، σ = ١,٥٥

(١١) أ + ب + $\frac{٦}{٢٥}$ + $\frac{٤}{٢٥}$ + $\frac{٢}{٢٥}$ = ١ و منها : أ + ب = $\frac{١٣}{٢٥}$

و كما سبق نجد : $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$. د (س$_ر$) = ب + $\frac{٣٢}{٢٥}$ ، ∵ μ = $\frac{٨}{٥}$

∴ ب = $\frac{٨}{٢٥}$ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$. د (س$_ر$) = ب + $\frac{٩٢}{٢٥}$

، ينتج : $\sigma^٢$ = ١,٤٤ ، σ = ١,٢

(١٢) معامل الإختلاف للأعمار (م) = $\frac{٢,٤}{٢١,٦} \times ١٠٠\%$ = ١١,١١ ٪

و بفرض أن : معامل الإختلاف للأوزان = ك ، ∵ ك = $\frac{١}{٢}$ م

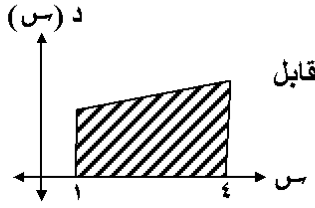
∴ ك = $\frac{١}{٢}$ × ١١,١١ ٪ = ٥,٥٦ ٪

∴ ٥,٥٦ ٪ = $\frac{\sigma}{٧٢} \times ١٠٠\%$

و منها : σ = ٤

تمارين (٣)

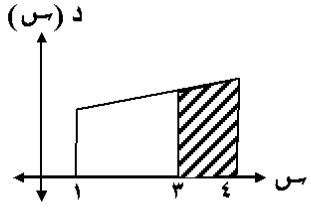
(١) د (١) = $\frac{٣}{١٨}$ ، د (٤) = $\frac{٩}{١٨}$



ل (١ ≤ س ≤ ٦) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل
" مساحة سطح شبه منحرف "

= $\frac{١}{٢}$ × ($\frac{٣}{١٨}$ + $\frac{٩}{١٨}$) × ٣ = ١

د (٣) = $\frac{٧}{١٨}$

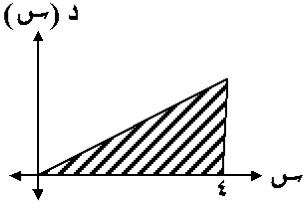


ل (س > ٣) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

= $\frac{١}{٢}$ × ($\frac{٧}{١٨}$ + $\frac{٩}{١٨}$) × ١

= $\frac{٤}{٩}$

(٢) د (٠) = ٠ ، د (٤) = ٤ ك

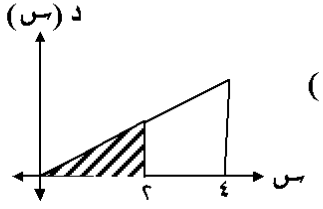


، ∵ د (س) دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائى س

∴ ل (٠ ≤ س ≤ ٤) = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ × [٠ + ٤ ك] × ٤ = ١

و منها : ك = $\frac{١}{٨}$ " لاحظ أن المنطقة المظللة عبارة عن سطح مثلث "



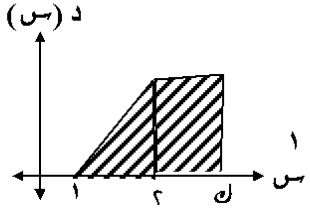
ل (−٢ ≤ س ≤ ٢)

= ل (−٢ ≤ س ≤ ٠) + ل (٠ ≤ س ≤ ٢)

= ٠ + مساحة المنطقة المظللة بالشكل المقابل

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

(٣) د (١) = ٠ ، د (٢) = ١ ، د (ك) = ١



، ∵ د (س) دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائى س

∴ ل (١ ≤ س ≤ ك) = ١

∴ ل (١ ≤ س ≤ ٢) + ل (٢ < س ≤ ك) = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ × [٠ + ١] × ١ + $\frac{١}{٢}$ × [١ + ١] (ك − ٢) = ١

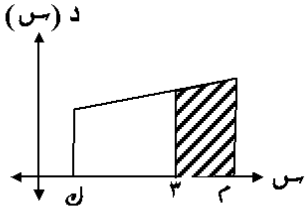
∴ و منها : ك = ٢,٥

ل (١,٥ ≤ س ≤ ٤) = ل (١,٥ ≤ س ≤ ٢) + ل (٢ ≤ س ≤ ٢,٥)

+ ل (٢,٥ ≤ س ≤ ٤) = $\frac{١}{٢}$ × [$\frac{١}{٢}$ + ١] × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ × [١ + ١] × ١

+ ٠ = $\frac{٧}{٨}$

(٤) د (ك) = $\frac{١}{٢٤}$ (٢ ك + ٣) ، د (م) = $\frac{١}{٢٤}$ (٢ م + ٣)



، ∵ د (س) دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائى س

∴ ل (ك ≤ س ≤ م) = ١ = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ × [$\frac{١}{٢٤}$ (٢ ك + ٣) + $\frac{١}{٢٤}$ (٢ م + ٣)] (م − ك) = ١

∴ (ك + م + ٣) (م − ك) = ٢٤ (١)

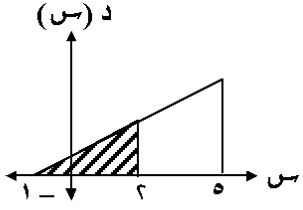
، ∵ ل (س > ٣) = $\frac{٧}{١٢}$ ∴ $\frac{١}{٢}$ × [$\frac{١}{٢٤}$ (٢ ك + ٣) + $\frac{٩}{٢٤}$] (٣ − ك) = $\frac{٧}{١٢}$

∴ (٦ + ك) (٣ − ك) = ١٤ و منها : ك = ١ ، ك = −٤ مرفوض

، بالتعويض في (١) ينتج : م = ٤ ، ك = −٧ مرفوض

ل (س ≤ ٢) = ل (١ ≤ س ≤ ٢) = $\frac{١}{٤}$

(٥) ل (س ≤ ٢) = ل (−١ ≤ س ≤ ٢)



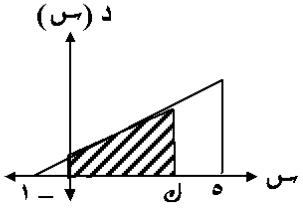
= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٣ = $\frac{٣}{٤}$

، ل (س ≤ ٢) = ل (٢ ≤ س ≤ ٥)

= $\frac{١}{٢}$ × [$\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$] × ٣ = $\frac{٣}{٤}$

حل آخر :

ل (س ≤ ٢) = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$



∵ (٠ ≤ س ≤ ك) = $\frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{١}{٢}$ × [$\frac{١}{١٨}$ + $\frac{١}{١٨}$ (ك + ١)] (ك − ٠) = $\frac{٢}{٣}$

∴ ك^{٢} + ٢ ك − ٢٤ = ٠

و منها : ك = ٤ ، ك = −٦ مرفوض

تمارين (٤)

(١) [١] ٠,٤١١٥ [٢] ٠,٤٥٥٤ [٣] ٠,٠١٠٧
[٤] ٠,٩٢٣٦ [٥] ١,٢٢ [٦] ٠,٢٥

(٢) راجع : مثال [١] و الأجوبة هى :
[١] ٠,٠٨٢٣ [٢] ٠,٩٧٧٢ [٣] ٠,٠٧٩٣
[٤] ٠,٦٣٦٨ [٥] ٠,١٣٥٤ [٦] ٠,٠٧٦٠
[٧] ٠,٤٧١١ [٨] ٠,٧٤٩٨

(٣) راجع : مثال [٢] و الأجوبة هى :
[١] ١,٩ [٢] ١,٥ [٣] ٠,٤٩
[٤] ١,٤١ [٥] ٠,٨٧ [٦] ٠,٤٩
[٧] ٢,٣٣ [٨] ٠,٩٧

تمارين (٥)

(١) [١] ١٠٠,٨٦ [٢] ٩٩,٣٦ [٣] ٦٨,٢٦ ٪ [٤] ٥

(٢) راجع : مثال [١] و الإجابة : (أ) ٠,٩٧٧٢ ، (ب) ٠,٩٦٩٠

(٣) راجع : مثال [٢] و الإجابة : (أ) ك = ١٠,٥ ، (ب) ٠,٨٤١٣

(٤) راجع : مثال [٣] و الإجابة : μ = ٨

(٥) كالتمرين السابق : و الإجابة : σ = ٥ ، σ^2 = ٢٥

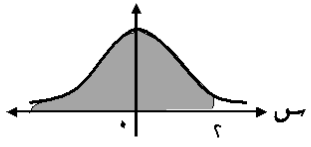
(٦) راجع : مثال [٤] و الإجابة : (أ) ٠,٥ ، (ب) ٠,١٥٧٤

(٧) نفرض أن س متغيرعشوائى طبيعى يمثل أطوال الشباب حيث μ = ١٧٠ ، σ = ١٠

أولاً : ل (س > ١٩٠) = ل (ص > ٢)

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٢)

= ٠,٥ + ٠,٤٧٧٢٢ = ٠,٩٧٧٢



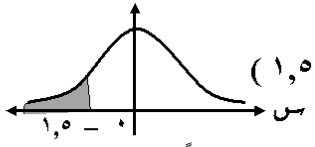
∴ عدد الشباب الذين تقل أطوالهم عن ١٩٠ سم = ٠,٩٧٧٢ × ١٠٠٠

= ٩٧٧ شاباً

ثانياً : ل (س < ١٥٥) = ل (ص < − ١,٥)

= ل (ص > ١,٥) = ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ − ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨



∴ عدد الشباب غير المقبولين = ٠,٠٦٦٨ × ١٠٠٠ = ٦٧ شاباً

(٨) نفرض أن س متغيرعشوائى طبيعى يمثل أطوال النبات حيث μ = ٥٠

ل (س < ٤٥) = ل (ص < − $\frac{٥}{\sigma}$) = ل (ص > $\frac{٥}{\sigma}$)

∴ ٠,١٠٥٦ = ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ $\frac{٥}{\sigma}$)

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ $\frac{٥}{\sigma}$) = ٠,٥ − ٠,١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤

∴ $\frac{٥}{\sigma}$ = ١,٢٥ و منها : σ = ٤ ، و التباين = ١٦

(٩) نفرض أن س متغيرعشوائى طبيعى يمثل درجات الطلاب حيث μ = ٧٥ ، σ = ١٥

ل (س ≤ ك) = ٠,١٥٠٠ ∴ ل (ص ≤ $\frac{ك − ٧٥}{١٥}$) = ٠,١٥٠٠

∴ ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ $\frac{ك − ٧٥}{١٥}$) = ٠,١٥٠٠

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ $\frac{ك − ٧٥}{١٥}$) = ٠,٥ − ٠,١٥٠٠ = ٠,٣٥٠٠

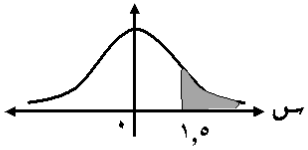
∴ $\frac{ك − ٧٥}{١٥}$ = ١,٠٤ و منها : ك = ٩٠,٦

(١٠) نفرض أن س متغيرعشوائى طبيعى يمثل الدخل الشهرى حيث μ = ٥٠٠ ، σ = ٢٠

ل (س > ٥٣٠) = ل (ص > ١,٥)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ − ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

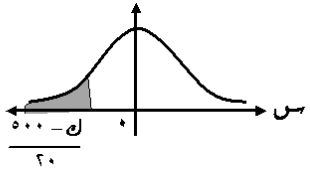


∴ عدد الأسر التى تحصل على دخل أكبر من ٥٣ جنيهاً = ٠,٠٦٦٨ × ٣٠٠

= ٢٠ أسرة

، ل (س > ك) = ٠,٠٤٠٠

∴ ل (ص > $\frac{ك − ٥٠٠}{٢٠}$) = ٠,٠٤٠٠



∴ ل (ص > $\frac{٥٠٠ − ك}{٢٠}$) = ٠,٠٤٠٠ أكمل كماسبق

و ينتج : ك = ٤٦٥ جنيهاً

(١١) نفرض أن $س_١$ متغيرعشوائى طبيعى يمثل الدخل الشهرى حيث $\mu = ٣٠$ ، $\sigma = ١٠$

$ل(س_١ < ٤٢) = ل(ص_١ < ١,٢) = ٠,٥ - ل(٠ \leqslant ص_١ \leqslant ١,٢)$

$= ٠,٥ - ٠,٣٨٤٩ = ٠,١١٥١$ (١)

، $س_٢$ متغيرعشوائى طبيعى يمثل الدخل الشهرى حيث $\mu = ٣٥$ ، $\sigma = ٥$

$ل(س_٢ < ٤٢) = ل(ص_٢ < ١,٤) = ٠,٥ - ل(٠ \leqslant ص_٢ \leqslant ١,٤)$

$= ٠,٥ - ٠,٤١٩٢ = ٠,٠٨٠٨$ (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن إحتمال التأخير بإستخدام التاكسى أكبر منه عند إستخدام الأوتوبيس ∴ الأوتوبيس أفضل

(١٢) نفرض أن س متغيرعشوائى طبيعى يمثل أنصاف أقطار الحلزون حيث

$\mu = ٢٥$ ، $\sigma = ٢٠$

إحتمال أن يكون الحلزون غير معيب $= ل(٢٠ \leqslant ص \leqslant ٢٨)$

$= ل(-٠,٢٥ \leqslant ص \leqslant ٠,١٥) = ل(٠ \leqslant ص \leqslant ٠,٢٥)$

$+ ل(٠ \leqslant ص \leqslant ٠,١٥) = ٠,٠٩٨٧ + ٠,٠٥٩٦ = ٠,١٥٨٣$

∴ إحتمال أن يكون الحلزون معيباً $= ١ - ٠,١٥٨٣ = ٠,٨٤١٧$

(١٣) نفرض أن س متغيرعشوائى طبيعى يمثل أطوال الطلبة حيث $\mu = ١٧٢$ ، $\sigma = ١٠$

و أن العدد الكلى للطلبة $= ن$

$ل(س < ١٧٠) = \frac{٥٠}{ن}$ ∴ $ل(ص < -٠,٠٢) = \frac{٥}{\sigma}$

∴ $ل(ص > ٠,٠٢) = \frac{٥٠}{ن}$

∴ $٠,٥ - ل(٠ \leqslant ص \leqslant ٠,٠٢) = \frac{٥٠}{ن}$

∴ $٠,٥ - ٠,٠٧٩٣ = \frac{٥٠}{ن}$ ∴ $٠,٤٢٠٧ = \frac{٥٠}{ن}$

و منها : $ن = ١١٩$ طالباً

تمارين (٦)

(١) [١] ٠,٦٤ [٢] [-١ ، ١] [٣] ١

(٢) بالتعويض المباشر ينتج : $ر = ٠,٦٧$ طردى

(٣) بالتعويض المباشر ينتج : $ر = -٠,٦١$ عكسى

(٤) بالتعويض المباشر ينتج : $ر = ٠,٩٨$ طردى

(٥) راجع : مثال [١] و الإجابة : $ر = -٠,٨٥$ عكسى

(٦) راجع : مثال [٣] و الإجابة : $ر = ٠,٩$

(٧) راجع : مثال [٣] و الإجابة : $ر = ٠,٩٣$

(٨)

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^٢$
جيد	مقبول	٣	٤,٥	-١,٥	٢,٢٥
جيد جداً	ضعيف	٢	٦	-٤	١٦
ضعيف	جيد	٥,٥	٣	٢,٥	٦,٢٥
ممتاز	مقبول	١	٤,٥	-٣,٥	١٢,٢٥
مقبول	جيد جداً	٤	٢	٢	٤
ضعيف	ممتاز	٥,٥	١	٤,٥	٢٠,٢٥
			مجـ		٦١

$ر = ١ - \frac{٦ \times ٦١}{٦ \times ٣٥} = -٠,٧٤$

(٩) كما التمرين السابق ، $ر = ٠,٤٤$ طردى

(١٠) كما فى تمرين (٨) ، $ر = -٠,٧٣$

تمارين (٧)

(١) [١] – ٠,٤٥ [٢] ٠,١٥ [٣] – ٠,٤٨

(٢) راجع : مثال [١] و الإجابة : ص = ٠,٧ س + ٢,١ ، ٦,٣

(٣) راجع : مثال [٢] و الإجابة : س = ١,١٧٦ ص + ٠,٨١٦ ، ٤,٣٤٤

(٤) كما سبق : و الإجابة : ص = ١,٧٤٧ س – ٢,٠٨ ، ١٥,٣٩

(٥) كما سبق : و الإجابة : س = –١,٦٨ ص + ١١,٠٤ ، ١١,٠٩

(٦) كما سبق : و الإجابة : ص = ٧٥ س + ١٢٥ ، ٨٧٥

(٧) راجع : مثال [٣] و الإجابة : ص = ٠,٧٠٥ س + ١,٦٣٥
، ٤٥٧١,٤٣ جنيهاً

(٨) راجع : مثال [٤] و الإجابة : ٢٨ ، ٣,٣٦ ، ٠,٩٧

(٩) كما سبق : و الإجابة : أ = –٠,٦١ ، حـ = –٠,٨١٧
، $ر^{٢} = \frac{أ}{حـ}$ و منها ينتج : ر = –٠,٤٦

(١٠) راجع : مثال [٥] و الإجابة : –٠,٤ عكسى

(١١) ∵ ٢٥ ص = ١٠ س + ١٧ بالقسمة على ٢٥
∴ ص = ٠,٤ س + ٠,٦٨
∴ أ = ٠,٤ بالمثل : حـ = + ١,٦
و كما سبق ينتج : ر = ٠,٨