

13/02/2012

Maths (Integration)

Lecture ①

Dr. Mohamed Baseem

* Integration (التكامل) :-

Integration is a reverse process of Differentiation.

التكامل هو عملية عكسية للتفاضل (الاشتقاق)

i.e. $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$

من الأمثلة: التكامل هو تعميم للقيمة قابلة للتجزئة، في
السادسة والجمع، الأمانة أو أن نجعل العناصر صغيرة جداً

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 5) = 2x$$

في اعادة بنقول انه قد ناس
المصيريه لاننا ببساطة التكامل
طبيعي انهم كانوا يتحسبون اجمع لهم ليطبق

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 7) = 2x$$

ونقرأ

تكامل $2x$ (نسبة x)

The integral of $2x$ with respect to x

$$\therefore \int 2x dx = x^2 + C$$

Ex 1. Find the curve whose slope of tangent of any point equals $2x$ and passes through $(5, 7)$

Sol: $y' = 2x$

$$\therefore y = \int 2x dx = \frac{2x^2}{2} + C = x^2 + C$$

The curve passes through $(5, 7)$

$$\therefore 7 = 25 + C \Rightarrow C = -18$$

$$y = x^2 - 18$$

* Properties of integration:-

$$\boxed{1} \int [a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)] dx = a \int f(x) dx \pm b \int g(x) dx$$

يعني تكامل ثابت \times دالة = الثابت \times تكامل الدالة

Hint

$$* \int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

يعني تكامل ضرب دالتين \neq تكامل الأولى \times تكامل الثانية

$$* \int f(x) dx = \int \frac{x f(x)}{x} dx$$

دي هانتخدوها لتبتر من كل لاشك كأنه تكامل شكل الدالة التي قبلها

* Table of Integration

$$\boxed{1} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

دا دايجا بننساه

$$\boxed{2} \int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$(1) \int f^n f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

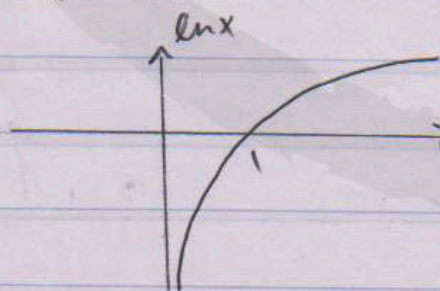
تكام دالة مضروبة من مشتقتها بيساوي الدالة $+ C$
ونزود الأس واحد ونقسم في الأس بجدية + الثابت

$$(2) \int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + C$$

تكام دالة في المقام مني اسبق مشتقتها بيساوي

* Properties of ln

(الدالة) \ln ثابت



$$* \ln 1 = 0, * \ln 0 = -\infty$$

$$* \ln(x^\alpha y^\beta) = \alpha \ln x + \beta \ln y$$

$$* \text{when } x > 1 \Rightarrow (\ln x) > 0$$

$$* \text{when } 0 < x < 1 \Rightarrow (\ln x) < 0$$

Ex: Find the following integrals:

$$(1) \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 |x|}{2} + c$$

$$\text{proof} \int \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$(2) \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{(\frac{1}{x})}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

$$(3) \int \underbrace{(x^3 + 2)^2}_{f(u)} \underbrace{x^2}_{f'(u)} dx = \frac{(x^3 + 2)^3}{3 \cdot 3} + c$$

$$= \frac{1}{9} (x^3 + 2)^3 + c$$

f	$\int f(u) du$	f	$\int f(u) du$
u^n	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c ; n \neq -1$	$\cos u$	$\sin u + c$
$\frac{1}{u}$	$\ln u + c$	$\sec u \cdot \tan u$	$\sec u + c$
e^u	$e^u + c$	$\sec^2 u$	$\tan u + c$
a^u	$\frac{a^u}{\ln(a)} + c$	$\csc u \cot u$	$-\csc u + c$
$\sin u$	$-\cos u + c$	$\csc^2 u$	$-\cot u + c$
		$\tan u$	$\ln \sec u + c$
		\sim	$-\ln \csc u + c$
		$\cot u$	$\ln \sin u + c$
		$\sec u$	$\ln \sec u + \tan u + c$
		$\csc u$	$\ln \csc u - \cot u + c$

F	$\int F(u) du$
$\frac{1}{a^2 + u^2}$	$\frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
$\frac{1}{a^2 - u^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + c$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}$	$\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
$\frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}$	$\cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$
$\frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$	$\frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

* Examples:- Find.

$$(1) \int e^{e^x + x} dx = \int e^{e^x} \cdot e^x dx = e^{e^x} + c$$

$$(2) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + c$$

$$(3) \int (1 + \cos x)^2 dx = \int (1 + 2 \cos x + \cos^2 x) dx$$

$$= \int (1 + 2 \cos x + \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)) dx = x + 2 \sin x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$(4) \int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx$$

$$= \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

$$(5) \int e^{\tan \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$$(6) \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$(7) \int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$$

$$(8) \int \frac{\tan \sqrt{x} \cdot \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{2}} dx$$

$$(9) \int \sin 3x \cdot \cos 2x dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$