

Université Moulay Ismail

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



**Examens de  
Mathématiques avec  
solutions (2016-2019)  
Filière: SMC  
Semestre III**

Réalisé par: J. H'michane

Année Universitaire 2019-2020

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Epreuve de Mathématiques pour la chimie 2018-2019 : session ordinaire</b>	<b>2</b>
1.1	Enoncé . . . . .	2
1.2	Solutions . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Epreuve de Mathématiques pour la chimie 2017-2018 : session ordinaire</b>	<b>8</b>
2.1	Enoncé . . . . .	8
2.2	Solutions . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Epreuve de Mathématiques pour la chimie 2015-2016 : session ordinaire</b>	<b>14</b>
3.1	Enoncé . . . . .	14
3.2	Solutions . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Epreuve de Mathématiques pour la chimie 2015-2016 : session rattrapage</b>	<b>17</b>
4.1	Enoncé . . . . .	17
4.2	Solutions . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Epreuve de Mathématiques pour la chimie 2014-2015 : session ordinaire</b>	<b>20</b>
5.1	Enoncé . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Epreuve de Mathématiques pour la chimie 2014-2015 : session rattrapage</b>	<b>22</b>
6.1	Enoncé . . . . .	22

---

---

# CHAPITRE 1

---

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE 2018-2019 : SESSION ORDINAIRE

### 1.1 Enoncé

#### Exercice 1 :

1. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :

$$(E) : 182x + 135y = 9$$

- a.** En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD(182,135). En déduire  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $182u + 135v = 1$ .
  - b.** En déduire que l'équation  $(E)$  possède des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .
  - c.** Déterminer une solution particulière de l'équation  $(E)$ . En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ .
2. Déterminer les entiers  $n$  vérifiant  $n + 1 \mid n^2 + 3n - 1$ .
3. En utilisant le théorème de Fermat, déterminer le reste de la division Euclidienne du nombre  $1853^{120}$  par 11.

#### Exercice 2 :

1. Développer en séries entières la fonction suivantes en déterminant leur rayon de convergence :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(1+2x)}.$$

2. Déterminer le rayon de convergence  $R$  et calculer pour tout  $x$  de  $] -R, R[$ , la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n.$$

Que se passe-t-il si  $|x| = R$ ?

3. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - 2xy' - 4y = 2.$$

En utilisant les séries entières, déterminer la fonction  $f$  solution de l'équation  $(E)$  avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .

### Exercice 3 :

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	14	19	27	28	35	45	63	69

Ajuster ce nuage de points par une fonction exponentielle.

### Exercice 4 :

$f$  étant une fonction de période  $2\pi$  telle que :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \in ]-\pi, \pi].$$

- Déterminer la série de Fourier associée à  $f$ .
- Montrer que cette série est convergente et déterminer sa somme.
- En utilisant ce qui précède, montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$ .

## 1.2 Solutions

### Exercice 1 :

- On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :

$$(E) : 182x + 135y = 9$$

**a.** On a

$$L_1 : 182 = 135 \times 1 + 47$$

$$L_2 : 135 = 47 \times 2 + 41$$

$$L_3 : 47 = 41 \times 1 + 6$$

$$L_4 : 41 = 6 \times 6 + 5$$

$$L_5 : 6 = 5 \times 1 + 1$$

donc  $\text{PGCD}(182, 135) = 1$ .

En posant  $a = 182$  et  $b = 135$  nous obtenons ;

$$L_1 \implies 47 = a - b$$

$$L_2 \implies 41 = b - 2 \times 47 = b - 2 \times (a - b) = 3b - 2a$$

$$L_3 \implies 6 = 47 - 41 = a - b - (3b - 2a) = 3a - 4b$$

$$L_4 \implies 5 = 41 - 6 \times 6 = 3b - 2a - 6 \times (3a - 4b) = 27b - 20a$$

$$L_5 \implies 1 = 6 - 5 = 3a - 4b - (27b - 20a) = 23a - 31b$$

ainsi, on peut prendre  $u = 23$  et  $v = -31$ .

**b.** Puisque  $PGCD(182, 135)$  divise 9, alors l'équation  $(E)$  possède des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**c.** On a  $23a - 31b = 1 \iff 9 \times 23a - 9 \times 31b = 9 \iff 207a - 279b = 9$ ,  
donc  $(207; -279)$  est une solution particulière de l'équation  $(E)$ .

On a  $182x + 135y = 9$  et  $182 \times 207 + 135 \times (-279) = 9$ , donc  $182 \times (x - 207) + 135 \times (y + 279) = 0$  et par suite  $182 \times (x - 207) = -135 \times (y + 279)$ .

Or  $182 \wedge (-135)$ , alors d'après le théorème de Gauss 182 divise  $y + 279$  et donc

$y + 279 = 182k/k \in \mathbb{Z}$ , c'est à dire  $y = 182k - 279/k \in \mathbb{Z}$ .

D'autre part,  $182 \times (x - 207) = -135 \times (y + 279) \implies 182 \times (x - 207) = -135 \times 182k \implies x - 207 = -135k \implies x = -135k + 207$ .

Réciproquement, on peut vérifier que  $(-135k + 207; 182k - 279)$  est une solution de l'équation  $(E)$ .

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  est :

$$S = \{(-135k + 207; 182k - 279)/k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. on a  $n + 1 \setminus n + 1 \implies n + 1 \setminus n(n + 1)$ .

Comme  $n + 1 \setminus n^2 + 3n - 1$  et  $n + 1 \setminus n(n + 1)$ , alors  $n + 1 \setminus n^2 + 3n - 1 - n(n + 1) \implies n + 1 \setminus 2n - 1$ .

D'autre part,  $n + 1 \setminus 2n - 1$  et  $n + 1 \setminus n + 1 \implies n + 1 \setminus 2n - 1 - 2(n + 1) \implies n + 1 \setminus -3$ , donc  $n + 1 \in \mathcal{D}(-3)$ .

Or  $\mathcal{D}(-3) = \{-3; -1; 1; 3\}$ , alors  $n + 1 = -3$  ou  $n + 1 = -1$  ou  $n + 1 = 1$  ou  $n + 1 = 3$  et donc  $n = -4$  ou  $n = -2$  ou  $n = 0$  ou  $n = 2$ .

Ainsi,  $S = \{-4; -2; 0; 2\}$ .

3. Puisque  $1853 \wedge 11 = 1$ , alors d'après le théorème de Fermat on a  $1853^{11-1} \equiv 1[11]$  et donc  $(1853^{10})^{12} \equiv 1^{12}[11]$ , ainsi  $1853^{120} \equiv 1[11]$ .

## Exercice 2 :

1. On considère la fonction  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(1+2x)}$ .

Tout d'abord, la décomposition de  $f$  en éléments simples nous donne :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}}{1+2x}.$$

— **Développement de la fonction**  $\frac{\frac{1}{3}}{x-1}$  :

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < 1$  on a

$$\frac{\frac{1}{3}}{x-1} = \frac{\frac{-1}{3}}{1-x} = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

— **Développement de la fonction**  $\frac{\frac{-3}{2}}{1+2x}$  :

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|2x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$  on a

$$\frac{\frac{-3}{2}}{1+2x} = \frac{-3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2x)^n = \frac{-3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n x^n.$$

Ainsi, le Développement de la fonction  $f$  est donné pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < \min(1; \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  par :

$$f(x) = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{-3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{-1}{3} + \frac{-3}{2} (-1)^n 2^n \right) x^n.$$

2. On considère la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ .

— **Rayon de convergence :**

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , donc  $R = 1$ .

— **Somme de la série :** On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n &= x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' \\ &= x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' \\ &= x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 \right)' \\ &= x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' \\ &= x \left( \frac{1}{1-x} \right)' \\ &= x \times \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Dans le cas  $|x| = 1$ , les séries numériques  $\sum_{n=1}^{+\infty} n$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot (-1)^n$  sont grossièrement divergentes.

3. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - 2xy' - 4y = 2.$$

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une solution de l'équation (E).

On a  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  et  $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ , donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff f''(x) - 2xf'(x) - 4f(x) = 2 \\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n - 4a_n) x^n = 2 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+2) a_n) x^n = 2. \end{aligned}$$

Donc,

- pour  $n = 0$  on a  $(0 + 2)(0 + 1)a_{0+2} - 2(0 + 2)a_0 = 2 \implies a_2 = 1 + 2a_0$ . Or  $a_0 = f(0) = 0$ , alors  $a_2 = 1$ . On a aussi,  $a_1 = f'(0) = 1$ .
- pour  $n \geq 1$  on a

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - 2(n + 2)a_n = 0 \implies a_{n+2} = \frac{2}{n + 1} \cdot a_n.$$

Donc,

$$\begin{array}{ll} a_3 = \frac{2}{2} \cdot a_1 = \frac{2}{2} & a_4 = \frac{2}{3} \cdot a_2 = \frac{2}{3} \\ a_5 = \frac{2}{4} \cdot a_3 = \frac{2 \times 2}{2 \times 4} & a_6 = \frac{2}{5} \cdot a_4 = \frac{2 \times 2}{3 \times 5} \\ a_7 = \frac{2}{6} \cdot a_5 = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 4 \times 6} & a_8 = \frac{2}{7} \cdot a_6 = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 5 \times 7} \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \end{array}$$

par itération nous obtenons :

$$a_{2n+1} = \frac{2^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot 2n} = \frac{2^n}{2^n \times n!} = \frac{1}{n!}$$

et

$$a_{2n} = \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot (2n-1)} = \frac{2^{n-1} \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{(2n)!} = \frac{2^{n-1} \times 2^n \times n!}{(2n)!} = \frac{2^{2n-1} \times n!}{(2n)!}$$

Ainsi, la solution est

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1} \times n!}{(2n)!} \cdot x^{2n}. \end{aligned}$$

### **Exercice 3 :**

On a

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	14	19	27	28	35	45	63	69
z=ln(y)	1.6	2.64	2.94	3.29	3.33	3.55	3.8	4.14	4.23

Déterminons l'équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$  avec la méthode des moindres carrés.

On a

$$z = Ax + B \text{ avec } A = \frac{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i x_i - \bar{z} \cdot \bar{x}}{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 - \bar{x}^2} \text{ et } B = \bar{z} - A \cdot \bar{x}.$$

Comme  $\bar{z} = \frac{1.6 + 2.64 + \dots + 4.23}{9} = \frac{29.52}{9} = 3.28$ ,  $\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 10}{9} = \frac{46}{9} = 5.11$ ,

$$\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i x_i = \frac{168.83}{9} = 18.76 \text{ et } \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 = \frac{304}{9} = 33.78,$$

alors  $A = \frac{2}{7.67} = 0.26$  et  $B = 3.28 - 0.26 \times 5.11 = 1.95$ .

Ainsi, l'équation de l'exponentielle est  $\hat{y} = ba^x$  avec  $b = e^B = 7.03$  et  $a = e^A = 1.3$ .

**Exercice 4 :**  $f$  étant une fonction de période  $2\pi$  telle que :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \in ]-\pi, \pi].$$

Tout d'abord, on a  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ .

1. On remarque que la fonction  $f$  est paire, donc

—  $b_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{— } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 + 1 dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_0^\pi = \frac{2(\pi^2 + 3)}{3}$$

$$\text{— } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x^2 + 1) \cos(nx) dx;$$

on utilisant une intégration par parties, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left( \left[ (x^2 + 1) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \cdot \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \left( 0 - \frac{2}{n} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin(nx) dx \right)$$

on utilisant une intégration par parties pour une deuxième fois, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{4}{n\pi} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin(nx) dx \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cdot \left( \left[ x \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos(nx)}{n} dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cdot \left( \pi \cdot \frac{-(-1)^n}{n} + \left[ \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^\pi \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cdot \left( \pi \cdot \frac{-(-1)^n}{n} + 0 \right) = \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

donc, la série de Fourier associée à  $f$  est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2 + 3}{3} + \sum_1^{+\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx).$$

2. Après le traçage de la courbe de  $f$  par exemple sur l'intervalle  $] -3\pi; 3\pi]$  on peut remarquer que la fonction  $f$  est continue et donc n'admet pas de points de discontinuité. De plus, la fonction  $f$  est dérivable en chaque point de l'intervalle  $] -\pi; \pi]$ . Donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à  $f$  est uniformément convergente vers  $f$  et on a dans ce cas,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2 + 3}{3} + \sum_1^{+\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx).$$

3. Pour  $x = 0$  on a

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{\pi^2 + 3}{3} + \sum_1^{+\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cdot \cos(0) &\implies 1 = \frac{\pi^2 + 3}{3} + \sum_1^{+\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12} \end{aligned}$$



---

---

# CHAPITRE 2

---

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE 2017-2018 : SESSION ORDINAIRE

### 2.1 Enoncé

#### Exercice 1 :

1. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :

$$(E) : 122x + 93y = 16$$

- a.** En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD(122,93). En déduire  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $122u + 93v = 1$ .
- b.** En déduire que l'équation  $(E)$  possède des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .
- c.** Sachant que  $(23, -30)$  est une solution particulière de l'équation  $(E)$ , résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E)$ .

2. Déterminer les entiers  $n$  vérifiant  $n - 2 \mid n^2 - 5$ .

3. En utilisant le théorème de Fermat, déterminer le reste de la division Euclidienne du nombre  $782^{23}$  par 5.

#### Exercice 2 :

1. Développer en séries entières les fonctions suivantes en déterminant le domaine de convergence :

**a.**  $f(x) = \frac{1}{2+x} - \frac{1}{(1-x)^2}$ .

**b.**  $g(x) = \frac{1}{4} \ln(4x+1)$ .

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - xy' - 3y = 0.$$

En utilisant les séries entières, déterminer la fonction  $f$  solution de l'équation  $(E)$  avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .

**Exercice 3 :**

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	12	18	25	32	37	45	60	63

1. Ajuster ce nuage de points par la méthode des moindres carés.
2. Interpoler la valeur de  $\hat{y}$  pour  $x = 9$ .

**Exercice 4 :**

$f$  étant une fonction de période  $2\pi$  telle que :

$$f(x) = |x| + 1 \text{ si } x \in ] -\pi, \pi].$$

1. Tracer la courbe de  $f$  sur  $] -3\pi, 3\pi]$ .
2. Déterminer la série de Fourier associée à  $f$ .
3. Montrer que cette série est convergente et déterminer sa somme.
4. En utilisant ce qui précède, montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

## 2.2 Solutions

**Exercice 1 :**

1. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :

$$(E) : 122x + 93y = 16$$

**a.** On a

$$L_1 : 122 = 93 \times 1 + 29$$

$$L_2 : 93 = 29 \times 3 + 6$$

$$L_3 : 29 = 6 \times 4 + 5$$

$$L_4 : 6 = 5 \times 1 + 1$$

donc  $PGCD(122, 93) = 1$ .

En posant  $a = 122$  et  $b = 93$  nous obtenons ;

$$L_1 \implies 29 = a - b$$

$$L_2 \implies 5 = b - 3 \times 29 = b - 3 \times (a - b) = 4b - 3a$$

$$L_3 \implies 4 = a - b - 4(4b - 3a) = 13a - 17b$$

$$L_4 \implies 1 = 4b - 3a - (13a - 17b) = -16a + 21b$$

ainsi, on peut prendre  $u = -16$  et  $v = 21$ .

**b.** Puisque  $PGCD(122, 93) = 1$  divise 16, alors l'équation (E) possède des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**c.** On a  $122x + 93y = 16$  et  $122 \times 23 + 93 \times (-30) = 16$ , donc  $122 \times (x - 23) + 93 \times (y + 30) = 0$  et par suite  $122 \times (x - 23) = -93 \times (y + 30)$ .

Or  $122 \wedge (-93)$ , alors d'après le théorème de Gauss 122 divise  $y + 30$  et donc

$$y + 30 = 122k/k \in \mathbb{Z}, \text{ c'est à dire } y = 122k - 30/k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } 122 \times (x - 23) &= -93 \times (y + 30) \implies 122 \times (x - 23) = -93 \times 122k \\ \implies x - 23 &= -93k \implies x = -93k + 23. \end{aligned}$$

Réciproquement, on peut vérifier que  $(-93k + 23; 122k - 30)$  est une solution de l'équation (E).

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{(-93k + 23; 122k - 30)/k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. on a  $n - 2 \setminus n - 2 \implies n - 1 \setminus n(n - 2)$ .

Comme  $n - 2 \setminus n^2 - 5$  et  $n - 2 \setminus n(n - 2)$ , alors  $n - 2 \setminus n^2 - 5 - n(n - 2) \implies n - 2 \setminus 2n - 5$ .

D'autre part,  $n - 2 \setminus 2n - 5$  et  $n - 2 \setminus n - 2 \implies n - 2 \setminus 2n - 5 - 2(n - 2) \implies n - 2 \setminus -1$ , donc  $n - 2 \in \mathcal{D}(-1)$ .

Or  $\mathcal{D}(-1) = \{-1; 1\}$ , alors  $n - 2 = -1$  ou  $n - 2 = 1$  et donc  $n = 1$  ou  $n = 3$ .

Ainsi,  $S = \{1; 3\}$ .

3. Puisque  $782 \wedge 5 = 1$ , alors d'après le théorème de Fermat on a  $782^{5-1} \equiv 1[5]$

et donc  $(782^4)^5 \equiv 1^5[5] \implies 782^{20} \equiv 1[5]$ .

D'autre part,  $782 \equiv 2[5] \implies 782^3 \equiv 2^3[5] \implies 782^3 \equiv 8[5] \implies 782^3 \equiv 3[5]$ ,

et donc  $782^{20} \times 782^3 \equiv 1 \times 3[5] \implies 782^{23} \equiv 3[5]$ .

### Exercice 2 :

1. **a.** On considère la fonction  $f(x) = \frac{1}{(2+x)} - \frac{1}{(1-x)^2}$ .

— **Développement de la fonction**  $\frac{1}{(2+x)}$  :

On a  $\frac{1}{(2+x)} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$ . Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|\frac{x}{2}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$  on a

$$\frac{1}{(2+x)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n.$$

— **Développement de la fonction**  $\frac{1}{(1-x)^2}$  :

On a  $\frac{1}{(1-x)^2} = -\left(\frac{1}{(1-x)}\right)'$ . Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < 1$  on a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = -\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot x^n.$$

Ainsi, le Développement de la fonction  $f$  est donné pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < \min(1; 2) = 1$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + n+1\right) x^n.$$

**b.** On considère la fonction  $g(x) = \frac{1}{4} \ln(4x + 1)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|4x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{4}$  on a

$$g(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x)^n}{n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{n} x^n$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - xy' - 3y = 0.$$

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une solution de l'équation (E).

On a  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  et  $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ , donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff f''(x) - x f'(x) - 3f(x) = 0 \\ &\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n - 3 a_n) x^n = 0 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+3) a_n) x^n = 0. \end{aligned}$$

Donc,

— pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+3) a_n = 0 \implies a_{n+2} = \frac{n+3}{(n+2)(n+1)} \times a_n.$$

Donc,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3}{1 \times 2} \times a_0; & a_3 &= \frac{4}{2 \cdot 3} \times a_1 \\ a_4 &= \frac{5}{3 \times 4} \times a_2 = \frac{3 \times 5}{2 \times 3 \times 4} \times a_0; & a_5 &= \frac{6}{4 \times 5} \times a_3 = \frac{4 \times 6}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \times a_1 \\ a_6 &= \frac{7}{5 \times 6} \times a_4 = \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times a_0; & a_7 &= \frac{8}{6 \times 7} \times a_5 = \frac{4 \times 6 \times 8}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7} \times a_1 \\ &\dots\dots\dots & & \\ &\dots\dots\dots & & \end{aligned}$$

par itération nous obtenons :

$$a_{2n+1} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \times a_1 = \frac{2^n \times (n+1)!}{(2n+1)!} \times a_1$$

et

$$a_{2n} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \times a_0 = \frac{(2n+2)!}{(2n)! \times 2^n \times (n+1)!} \times a_0.$$

— On  $a_0 = f(0) = 0$  et  $a_1 = f'(0) = 1$ , donc  $a_{2n+1} = \frac{2^n \times (n+1)!}{(2n+1)!}$  et  $a_{2n} = 0$ .

Ainsi, la solution est

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \times (n+1)!}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}. \end{aligned}$$

### Exercice 3 :

On a

x	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y	5	12	18	25	32	37	45	60	63

1. Déterminons l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  avec la méthode des moindres carrés. On a

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 y_i x_i - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 - \bar{x}^2} \text{ et } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}.$$

$$\text{Comme } \bar{y} = \frac{5 + 12 + \dots + 63}{9} = \frac{297}{9} = 33, \bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 10}{9} = \frac{46}{9} = 5.11,$$

$$\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 y_i x_i = \frac{1990}{9} = 221.11 \text{ et } \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 = \frac{304}{9} = 33.78,$$

$$\text{alors } a = \frac{52.48}{7.67} = 6.84 \text{ et } b = 33 - 6.84 \times 5.11 = -1.95.$$

Ainsi, l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  avec la méthode des moindres carrés est  $y = 6.84x - 1.95$

2. La valeur de  $\hat{y}$  pour  $x = 9$  est  $y = 6.84 \times 9 - 1.95 = 59.61$ .

### Exercice 4 : $f$ étant une fonction de période $2\pi$ telle que :

$$f(x) = |x| + 1 \text{ si } x \in ]-\pi, \pi].$$

Tout d'abord, on a  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ .

1. Courbe de  $f$  sur  $] -3\pi; 3\pi]$ .
2. On remarque que la fonction  $f$  est paire, donc

—  $b_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{— } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |x| + 1 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x + 1 dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_0^\pi = \pi + 2.$$

$$\text{— } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x + 1) \cos(nx) dx;$$

on utilisant une intégration par parties, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left( \left[ (x+1) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \left( 0 - \left[ \frac{-\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right).$$

donc, la série de Fourier associée à  $f$  est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi + 2}{2} + \sum_1^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) \cos(nx).$$

3. Après le traçage de la courbe de  $f$  sur l'intervalle  $] -3\pi; 3\pi]$  on peut remarquer que la fonction  $f$  est continue et donc n'admet pas de points de discontinuité. De plus, la fonction  $f$  est dérivable en chaque point de l'intervalle  $] -\pi; \pi]$ . Donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à  $f$  est uniformément convergente vers  $f$  et on a dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi+2}{2} + \sum_1^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) \cos(nx) \\
 &= \frac{\pi+2}{2} + \sum_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{(-1)^{2n+1} - 1}{(2n+1)^2} \right) \cos((2n+1)x) + \sum_1^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{(-1)^{2n} - 1}{2n^2} \right) \cos(2nx) \\
 &= \frac{\pi+2}{2} + \sum_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{-1 - 1}{(2n+1)^2} \right) \cos((2n+1)x) + 0 \\
 &= \frac{\pi+2}{2} + \sum_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{-2}{(2n+1)^2} \right) \cos((2n+1)x).
 \end{aligned}$$

4. Pour  $x = 0$  on a

$$\begin{aligned}
 f(0) = \frac{\pi+2}{2} + \sum_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{-2}{(2n+1)^2} \right) \cos(0) &\implies 1 = \frac{\pi+2}{2} + \sum_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{-2}{(2n+1)^2} \right) \\
 &\implies 1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \sum_0^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \\
 &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

---

---

# CHAPITRE 3

---

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE 2015-2016 : SESSION ORDINAIRE

### 3.1 Enoncé

#### Exercice 1 :

- a.* Déterminer les entiers  $n$  vérifiant  $n - 3 \mid n^3 - 3$ .
- b.* Calculer le reste dans la division euclidienne de  $983^{42}$  par 5.
- c.* Donner l'écriture de l'entier  $n = \overline{29a}_{(12)}$  en base 8.
- d.* Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 234 par 7.

#### Exercice 2 :

1. Calculer les sommes des séries entières de termes généraux :

*a.*  $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{2n+1}.$

*b.*  $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}.$

2. Développer en séries entières les fonctions suivantes, :

*a.*  $f(x) = \arctan(2x).$

*b.*  $g(x) = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{(1+2x)^2}.$

#### Exercice 3 :

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	7	9	11	13	14	16	18	20
y	38	42	53	86	104	144	201	292

- a.** Donner l'équation de la droite des moindres carrés ajustant ce nuage de points.  
**b.** Interpoler la valeur de  $\hat{y}$  pour  $x = 15$ .

## 3.2 Solutions

### Exercice 1 :

- a.** on a  $n - 3 \mid n - 3 \implies n - 3 \mid n^2(n - 3)$ .  
 Comme  $n - 3 \mid n^3 - 3$  et  $n - 3 \mid n^2(n - 3)$ , alors  $n - 3 \mid n^3 - 3 - n^2(n - 3) \implies n - 3 \mid -3 + 3n^2$ .  
 D'autre part,  $n - 3 \mid -3 + 3n^2$  et  $n - 3 \mid n - 3 \implies n - 3 \mid -3 + 3n^2 - 3n(n - 3) \implies n - 3 \mid -1 + 9n$ ,  
 et on a  $n - 3 \mid -1 + 9n$  et  $n - 3 \mid n - 3 \implies n - 3 \mid -1 + 9n - 9(n - 3) \implies n - 3 \mid 26$ , donc  
 $n - 3 \in \mathcal{D}(26)$ .  
 Or  $\mathcal{D}(26) = \{-26; -13; -2; -1; 1; 2; 13; 26\}$ , alors  $n - 3 = -26$  ou  $n - 3 = -13$  ou  $n - 3 = -2$   
 ou  $n - 3 = -1$  ou  $n - 3 = 1$  ou  $n - 3 = 2$  ou  $n - 3 = 13$  ou  $n - 3 = 26$  et donc  $S =$   
 $\{-23; -10; 1; 2; 4; 5; 16; 29\}$ .
- b.** Puisque  $983 \wedge 5 = 1$ , alors d'après le théorème de Fermat on a  $983^{5-1} \equiv 1[5]$   
 et donc  $(983^4)^{10} \equiv 1^{10}[5] \implies 983^{40} \equiv 1[5]$ .  
 D'autre part,  $983 \equiv 3[5] \implies 983^2 \equiv 3^2[5] \implies 983^2 \equiv 9[5] \implies 983^2 \equiv 4[5]$ ,  
 et donc  $983^{40} \times 983^2 \equiv 1 \times 4[5] \implies 983^{42} \equiv 4[5]$ .
- c.** Tout d'abord, on va écrire  $\overline{29a}_{12}$  dans la base décimal.  
 On a  $\overline{29a}_{12} = 2 \times 12^2 + 9 \times 12^1 + 10 \times 12^0 = 406$ .  
 Puis, on va faire les divisions Euclidienne de 406 par 8 jusqu'à ce que le quotient soit nul. La  
 suite des restes inversée forme l'écriture dans la base 8 :

$$\begin{aligned} 406 &= 8 \times \mathbf{50} + \mathbf{6} \\ 50 &= 8 \times \mathbf{6} + \mathbf{2} \\ 6 &= 8 \times \mathbf{0} + \mathbf{6} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \overline{29a}_{12} = \overline{626}_8.$$

- d.**  $243 = 7 \times 33 + 3$ .

### Exercice 2 :

1. **a.** Soit  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ .  
 On a  $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ . Donc, par dérivation de développement en série entière on  
 obtient  $(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$  et par intégration de développement en série entière  
 on aura  $xS(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .  
 Ainsi, pour  $x \neq 0$  on a  $S(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  et pour  $x = 0$  on a  $S(0) = 1$ .
- b.** Soit  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ . On a  $S(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = xe^{-x^2}$ .
2. Développer en séries entières les fonctions suivantes :



- a. On remarque que  $f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$ . Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $4x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$  on a :

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x^2)^n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} x^{2n},$$

ainsi, par intégration de développement en série entière on aura

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n(2n+1)} x^{2n+1}$$

- b. Développement de la fonction  $\frac{1}{(1+3x)}$  :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}$  on a

$$\frac{1}{(1+3x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot x^n.$$

- c. Développement de la fonction  $\frac{1}{(1+2x)^2}$  :

On a  $\frac{1}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1+2x)} \right)'$ . Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$  on a

$$\frac{1}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2x)^n \right)' = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot (-1)^n \cdot (2x)^{n-1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot x^n.$$

Ainsi, le Développement de la fonction  $f$  est donné pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < \min(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$  par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (-1)^n \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2^n \right) \cdot x^n. \end{aligned}$$

**Exercice 3 :** On a

x	7	9	11	13	14	16	18	20
y	38	42	53	86	104	144	201	292

1. Déterminons l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  avec la méthode des moindres carrés. On a

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i x_i - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \bar{x}^2} \text{ et } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}.$$

$$\text{Comme } \bar{y} = \frac{38 + 42 + \dots + 201 + 292}{8} = \frac{960}{8} = 120,$$

$$\bar{x} = \frac{7 + 9 + 11 + \dots + 18 + 20}{8} = \frac{108}{8} = 13.5,$$

$$\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i x_i = \frac{15563}{8} = 1945.38 \text{ et } \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 = \frac{1596}{8} = 199.5,$$

$$\text{alors } a = \frac{325.38}{17.25} = 18.86 \text{ et } b = 120 - 18.86 \times 13.5 = -134.61.$$

Ainsi, l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  avec la méthode des moindres carrés est  $y = 18.86x - 134.61$ .

2. La valeur de  $\hat{y}$  pour  $x = 15$  est  $y = 18.86 \times 15 - 134.61 = 148.29$ .

---

---

# CHAPITRE 4

---

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE 2015-2016 : SESSION RATTRAPAGE

### 4.1 Enoncé

#### Exercice 1 :

- a.* En utilisant le théorème de Bézout, montrer que :  $(2n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 2) = 1$ .  
*b.* Montrer que si  $a$  est un entier impair alors  $a^2 \equiv 1[8]$ .

#### Exercice 2 :

1. Calculer les sommes suivantes :

*a.*  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} x^n$

*b.*  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 2}{n!} x^n$

2. Développer en séries entières ces deux fonctions :

*a.*  $f(x) = \frac{3x}{(3+x)^3}$

*b.*  $g(x) = \ln(3+x)$

#### Exercice 3 :

Lors d'une expérience, on a relevé les valeurs suivantes :

x	7	9	11	13	14	16	18	20
y	38	42	53	86	104	144	201	292

- a.* Ajuster ce nuage de points à une fonction puissance.  
*b.* Interpoler la valeur de  $\hat{y}$  pour  $x = 15$ .

## 4.2 Solutions

### Exercice 1 :

- a.** On a  $(2n^2 + 4n + 1) - 2n(n + 2) = 1$ , donc il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $(2n^2 + 4n + 1)u + (n + 2)v = 1$  et par suite d'après le théorème de Bézout, on a  $(2n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 2) = 1$ .
- b.** Si  $a$  est impair, alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = 2k + 1$  et par suite  $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4 \times 2k' + 1 = 8k' + 1$ . Ainsi,  $a^2 \equiv 1[8]$ .

### Exercice 2 :

1. **a.** Soit  $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} x^n$ . Tout d'abord, remarquons que  $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1} \right)$ .  
Donc, si  $x \neq 0$ ;

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} x^n &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - 1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n+1} - \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x \ln(1 + x) + \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x \ln(1 + x) + \frac{1}{x} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n - x + \frac{x^2}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x \ln(1 + x) + \frac{1}{x} \ln(1 + x) - 1 + \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Si  $x = 0$ , alors  $S(0) = 0$ .

- b.** On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 2}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n - 1) + 2}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n - 2)!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x^2 e^x + 2e^x = (x^2 + 2)e^x. \end{aligned}$$

2. **a.** Remarquons que  $\frac{1}{(3 + x)^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3 + x} \right)''$ .

Or  $\frac{1}{3 + x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{3}}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|\frac{x}{3}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3$  on a :

$$\frac{1}{3 + x} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n}$$

$$\text{et donc } \left( \frac{1}{3 + x} \right)'' = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n(n + 1) \frac{x^{n-2}}{3^n}$$

$$\text{et par suite } \frac{1}{(3 + x)^3} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n(n + 1) \frac{x^{n-2}}{3^n}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{(3 + x)^3} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n(n + 1) \frac{x^{n-1}}{3^n}.$$

- b.** On a  $g(x) = \ln(3+x) = \ln 3 + \ln(1+\frac{x}{3})$ . Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|\frac{x}{3}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3$  on a :

$$g(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

### Exercice 3 :

- a.** Posons  $u = \ln x$  et  $v = \ln y$ . On a

u	1.95	2.2	2.4	2.56	2.64	2.77	2.89	3.0
v	3.64	3.74	3.97	4.45	4.64	4.97	5.3	5.68

Déterminons l'équation de la droite de régression de  $v$  en  $u$  avec la méthode des moindres carrés. On a

$$v = Au + B \text{ avec } A = \frac{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 u_i v_i - \bar{u} \cdot \bar{v}}{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 u_i^2 - \bar{u}^2} \text{ et } B = \bar{v} - A \cdot \bar{u}.$$

$$\text{Comme } \bar{v} = \frac{3.64 + 3.74 + \dots + 5.3 + 5.68}{8} = \frac{36.39}{8} = 5.55,$$

$$\bar{u} = \frac{1.95 + 2.2 + \dots + 2.89 + 3.0}{8} = \frac{20.41}{8} = 2.55,$$

$$\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 u_i v_i = \frac{94.62}{8} = 11.83 \text{ et } \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 u_i^2 = \frac{169.38}{8} = 21.17,$$

$$\text{alors } A = \frac{-2.32}{14.67} = -0.16 \text{ et } B = 5.55 + 0.16 \times 2.55 = 5.96.$$

Ainsi, l'équation de la droite de régression de  $v$  en  $u$  avec la méthode des moindres carrés est  $v = -0.16u + 5.96$ .

Donc, l'équation de la fonction puissance est donnée par :

$$\hat{y} = e^{5.96} \times x^{-0.16}.$$

- b.** Pour  $x = 15$  on a  $\hat{y} = e^{5.96} \times 15^{-0.16} = 251.32$ .

---

---

# CHAPITRE 5

---

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE 2014-2015 : SESSION ORDINAIRE

### 5.1 Enoncé

#### Exercice 1 :

- a.* Calculer le reste dans la division euclidienne de  $44^{55}$  par 7.
- b.* Donner l'écriture de l'entier  $n = \overline{10a}_{(12)}$  en base 9.
- c.* Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation :  $(E) \quad 33x - 24y = 6$ .

#### Exercice 2 :

- a.* Etudier la convergence des intégrales généralisées :  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t + \sin t} dt$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .
- b.* Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions  $g_n(x) = \frac{x}{x+n}$  sur  $[0; 1]$ . En déduire la nature de la suite  $u_n = \int_0^1 \frac{x}{x+n} dx$ .
- c.* Donner le rayon de convergence de la série entière :  $\sum_{k \geq 1} \frac{k^k}{k!} x^k$ .

#### Exercice 3 :

Pour tout entier  $n \geq 0$  et tout réel  $x$ , on pose :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{1 + n^2}$$

- a.* Donner le domaine de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ .
- b.* Etudier la convergence uniforme de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  sur  $[0; +\infty[$ .
- c.* Montrer que  $f(x) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} f_n(x)$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$ .

N.B :

- Dans les exercices 1 et 2, les questions sont indépendantes.
- Les calculettes et les documents sont interdits.

---

---

## CHAPITRE 6

---

# EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE 2014-2015 : SESSION RATTRAPAGE

### 6.1 Enoncé

#### Exercice 1 :

- a.** Déterminer les entiers  $n$  vérifiant :  $n + 1 \mid n^2 - n + 6$ .
- b.** Déterminer deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $36u - 25v = 5$ .
- c.** En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que :  
$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad 10^{6n+4} + 3 \equiv 0[7].$$

#### Exercice 2 :

- a.** Etudier la convergence des intégrales généralisées :  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  et  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1+t)^3}} dt$ .
- b.** Etudier la convergence des séries suivantes :  $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$ ,  $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ .
- c.** Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$  ne converge pas simplement sur  $\mathcal{R}$ .
- d.** Indiquer le domaine de convergence puis calculer la somme des séries suivantes :  $\sum_{k \geq 1} kx^k$  et  $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin^k(t)}{2^k}$ .

#### Exercice 3 :

Pour tout entier  $n$ , on définit la suite de fonction  $(f_n)$  sur  $\mathcal{R}$  par :

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}$$

- a.** Etudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$  sur  $\mathcal{R}$ .
- b.** En déduire que la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément sur  $\mathcal{R}$ .
- c.** Soit  $\omega > 0$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[\omega; +\infty[$ .