ارسم السطح

Ex:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0$$

$$(x^2 - 4x) + (2y^2 + 4y) + (z^2 - 2z) = -3$$

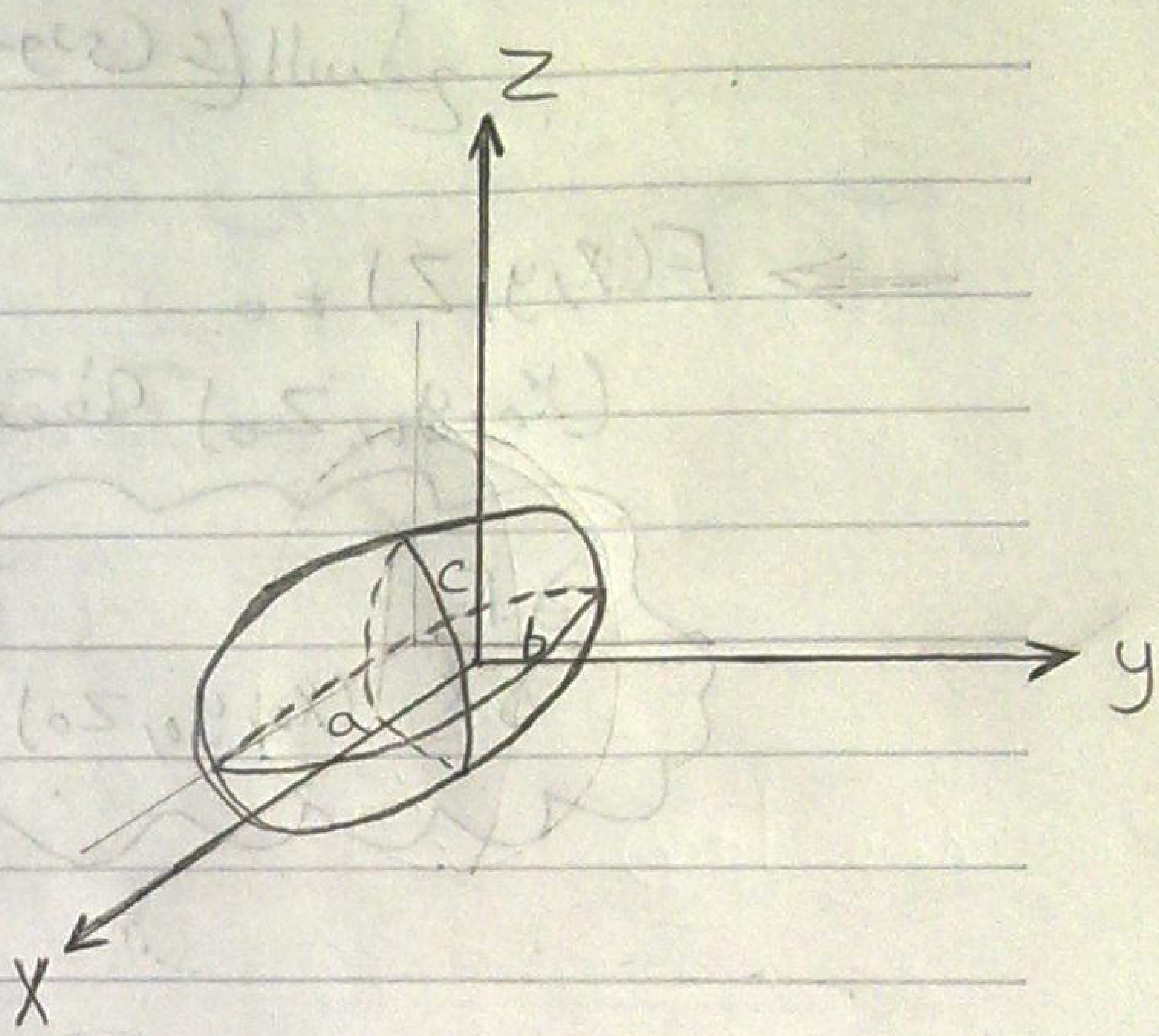
$$(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + (z-1)^2 = -3 + 4 + 2 + 1 = 4 \qquad \div 4$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$$

$\Rightarrow$ Ellpsoid

Center $= (2, -1, 1)$

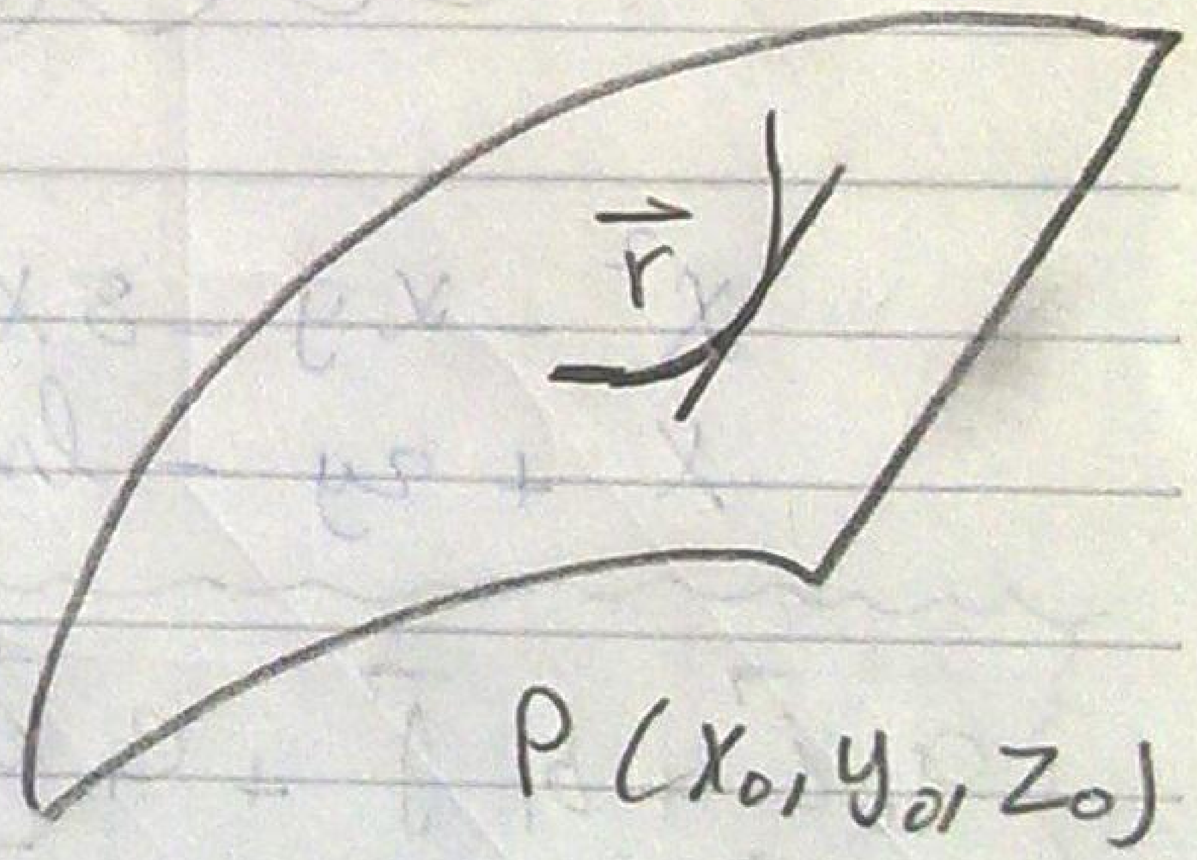
$a = 2$ & $b = \sqrt{2}$ & $c = 2$



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

معادلة منحنى

$$F(x, y, z) = 0$$



بفرض أن المنحنى يقع فى السطح

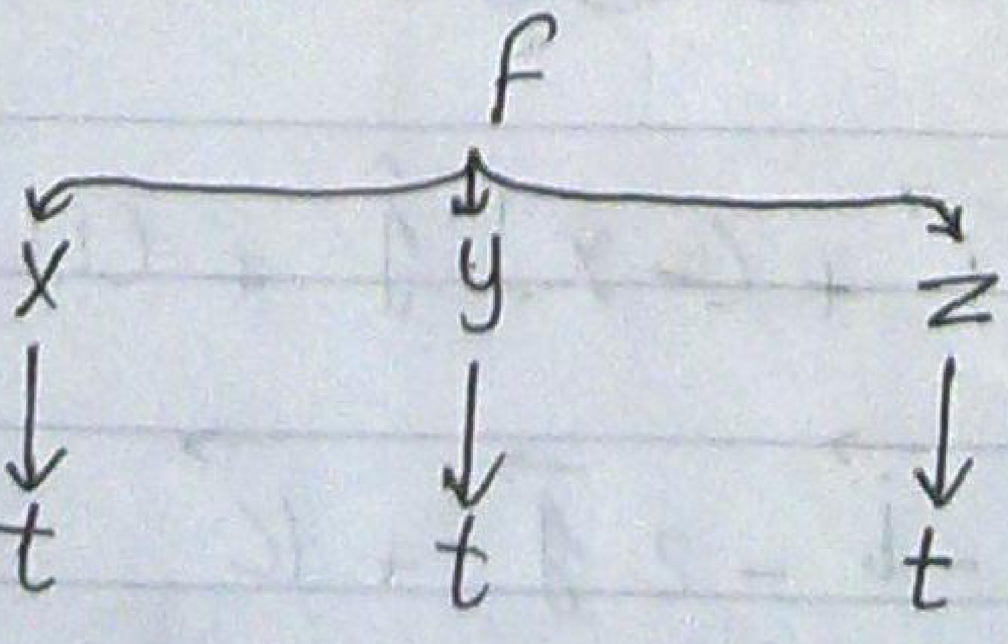
$\therefore$ معادلة المنحنى تحقق معادلة السطح

$P(x_0, y_0, z_0)$

$z = f(x, y)$

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

هنفاضل chain rule



$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right)}_{\text{العمودى ع السطح}} \cdot \underbrace{\left(x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}\right)}_{\bar{r}'\ \text{tangent}} = 0$$

متعامدين لأنهم يساوى zero

$\Longrightarrow F(x,y,z)=0$

مطلوب المتجه العمودى ع السطح عند النقطة (x_0,y_0,z_0)

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\vec{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\vec{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\vec{k}}$$

معادلة المستوى المماس للسطح

$$\boxed{(x-x_0)F_x + (y-y_0)F_y + (z-z_0)F_z = 0}$$

أثبت أن السطحان

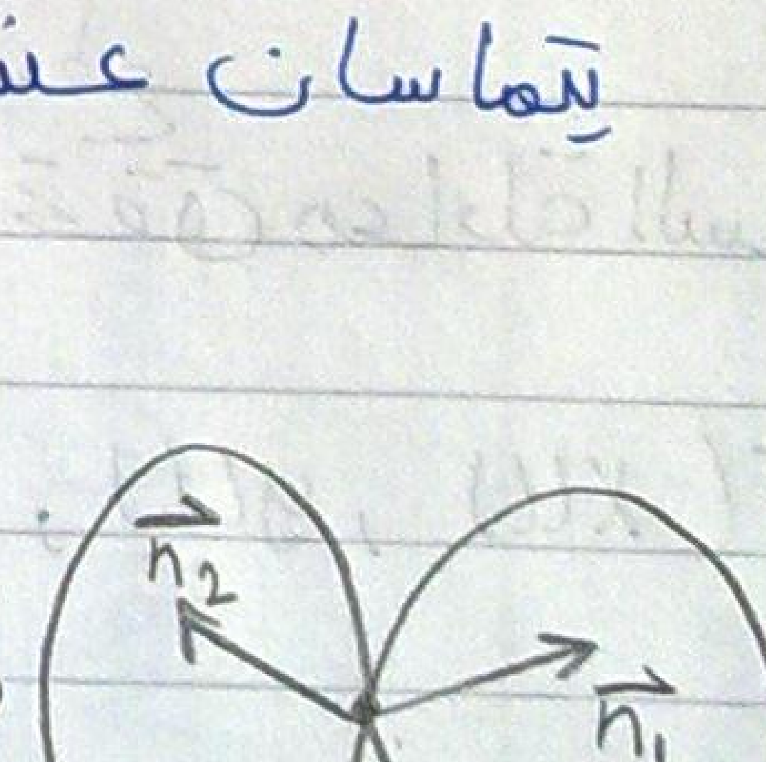
$$x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$$
$$x + 2y - \ln z + 4 = 0$$

يتماسان عند النقطة $(2,-3,1)$

$a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ شرط توازى متجهين

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



$$\vec{n}_1 = (2x - y - 8)\vec{i} + (-x)\,\hat{j} + (1)\,\vec{k}\Big|_{(2,-3,1)}$$
$$= -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} - \frac{1}{z}\hat{k}\Big|_{(2,-3,1)} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$\because\ \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Longrightarrow$ السطحان يتماسان عند هذه النقطة

ملحوظة: اذا أردنا اثبات أن سطحان يتماسات عند نقطة فإننا نثبت أن العمودى ع السطح الأول يوازى العمودى ع السطح الثانى

اثبت أن السطحين

$$x^2+y^2+z^2=ax$$
$$x^2+y^2+z^2=by$$

متعامدان عند أى نقطة من نقط تقاطعهما

$$\Longrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = (2x-a)\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$$

$$\vec{n}_2 = 2x\hat{i} + (2y-b)\hat{j} + 2z\hat{k}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2x(2x-a) + 2y(2y-b) + 2z(2z)$$

$$= 4x^2 - 2ax + 4y^2 - 2by + 4z^2$$

$$= 4(x^2+y^2+z^2) - 2ax - 2by$$

$$= \cancel{4(x^2+y^2+z^2)} - \cancel{2(x^2+y^2+z^2)} - \cancel{2(x^2+y^2+z^2)}$$

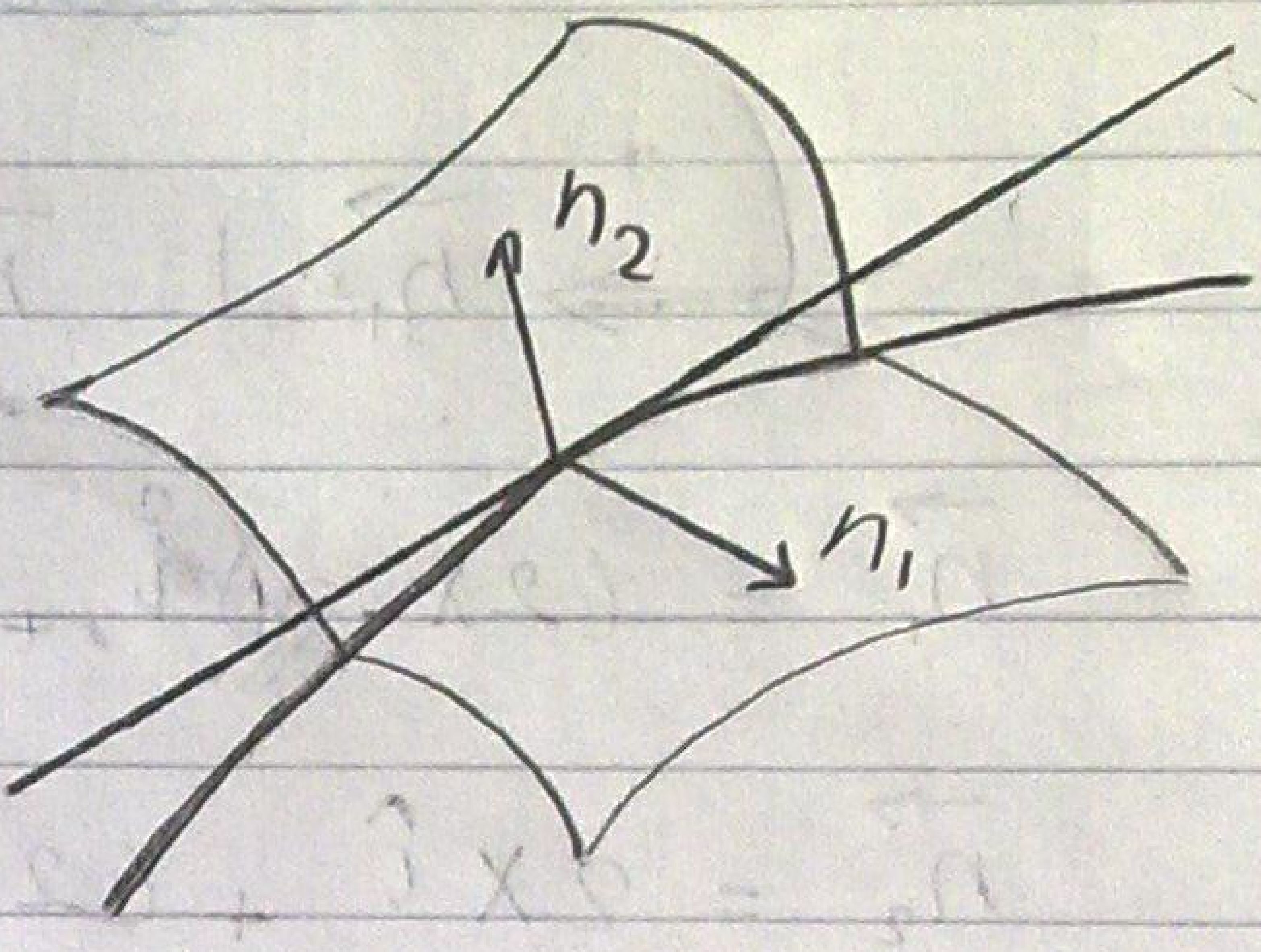
$$= \text{Zero}$$

∴ السطحان متعامدان عند أى نقطة من نقط تقاطعهما

Find the tangent line to the curve of intersection of the surfaces:

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20$$
$$x^2 + y^2 + z = 4$$

at the point $(0, 1, 3)$



$$\vec{n}_1 = 2x\,\hat{i} + 4y\,\hat{j} + 4z\,\hat{k}\,\Big|_{(0,1,3)}$$

$$\vec{n}_1 = 4\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$\vec{n}_2 = 2x\,\hat{i} + 2y\,\hat{j} + \hat{k}\,\Big|_{(0,1,3)}$$

$$n_2 = 2\hat{j} + \hat{k}$$

$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 =$ متجه عمودي على n_1, n_2

$=$ *continue....*

Ahmed Badr